

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РФ

Корпачева М.А.

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**

**Часть 1
Теоретические сведения**

Учебное пособие

Брянск 2026

ББК 22.14я73
К-68

Корпачева М.А. Теория вероятностей и математическая статистика. Часть 1. Учебное пособие. Брянск, 2026. - 93 с.

Пособие содержит необходимый теоретический материал по комбинаторике, теории вероятностей и статистике предусмотренной школьной программой. Каждая глава состоит из теоретического материала и примеров с решениями. Книга может быть использована в качестве пособия для обучающихся общеобразовательных школ.

Рецензенты:

Малинникова Н.А. кандидат педагогических наук, доцент

Еловикова Ю.А. кандидат физико-математических наук, доцент

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Глава 1. Элементы комбинаторики	7
1. Основные правила комбинаторики.....	10
2. Размещения, перестановки и сочетания.....	13
2.1. Сочетания с повторениями и без повторений.....	14
2.2. Размещения с повторениями и без повторений.....	16
2.3. Перестановки с повторениями и без повторений.....	18
3. Свойства сочетаний без повторений. Бином Ньютона. Треугольник Паскаля.....	20
4. Решение типовых задач.....	23
Глава 2. Элементы теории вероятностей	24
История возникновения теории вероятностей.....	24
Применение теории вероятностей в XIX-XX веках.....	26
1. Эксперимент и случайные события.....	29
2. Элементарные исходы испытания.....	31
3. Классическое определение вероятности.....	34
4. Применение формул комбинаторики при решении задач на вероятность.....	40
5. Геометрическое определение вероятности.....	43
6. Статистическое определение вероятности.....	46
7. Операции над событиями.....	49
8. Вероятность суммы и произведения событий.....	52
9. Формула полной вероятности.....	55
10. Формула Байеса.....	57
11. Схема Бернулли.....	59
Глава 3. Элементы математической статистики	66
1. Случайные величины.....	66
2. Числовые характеристики дискретной случайной величины.....	70
3. Законы распределения дискретной случайной величины.....	76
4. Непрерывные случайные величины.....	81
5. Закон больших чисел. Неравенство Чебышева.....	84
Приложения	90
Литература	93

ВВЕДЕНИЕ

Введение разделов «Элементы комбинаторики», «Элементы теории вероятностей», «Элементы математической статистики» в школьный курс математики было рекомендовано в основной школе с 2003-2004 учебного года в соответствии с письмом Министерства образования Российской Федерации от 23 сентября 2003 г. №03-93 ИН/13-03, и с 2006-2007 уч.года стало обязательным для изучения. Федеральный государственный образовательный стандарт (ФГОС) основного общего образования от 31 мая 2021 г. №287 определяет конкретные требования к предметным результатам по предметной области «Математика», в частности, учебный курс «Вероятность и статистика» (на базовом уровне) должен обеспечить:

- умение оперировать понятиями: столбиковые и круговые диаграммы, таблицы, среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах числового набора; умение извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию, представленную в таблицах и на диаграммах, отражающую свойства и характеристики реальных процессов и явлений; умение распознавать изменчивые величины в окружающем мире;

- умение оперировать понятиями: случайный опыт (случайный эксперимент), элементарное событие (элементарный исход) случайного опыта, случайное событие, вероятность события; умение находить вероятности случайных событий в опытах с равновероятными элементарными событиями; умение решать задачи методом организованного перебора и с использованием правила умножения; умение оценивать вероятности реальных событий и явлений, понимать роль практически достоверных и маловероятных событий в окружающем мире и в жизни; знакомство с понятием независимых событий; знакомство с законом больших чисел и его ролью в массовых явлениях.

(на углубленном уровне):

– умение свободно оперировать понятиями: столбиковые и круговые диаграммы, таблицы, среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия и стандартное отклонение числового набора, статистические данные, статистическая устойчивость, группировка данных; знакомство со случайной изменчивостью в природе и обществе; умение выбирать способ представления информации, способствующий природе данных и целям исследования; анализировать и сравнивать статистические характеристики числовых наборов, в том числе при решении задач из других учебных предметов;

– умение свободно оперировать понятиями: случайный опыт (случайный эксперимент), элементарное случайное событие (элементарный исход) опыта, случайное событие, частота и вероятность случайного события; условная вероятность, независимые события, дерево случайного эксперимента; умение находить вероятности событий в опытах с равновероятными элементарными событиями; знакомство с ролью маловероятных и практически достоверных событий в природных и социальных явлениях; умение оценивать вероятности событий и явлений в природе и обществе; умение выполнять операции над случайными событиями, находить вероятности событий, в том числе с применением формул и графических схем (диаграмм Эйлера, графов); умение приводить примеры случайных величин и находить их числовые характеристики; знакомство с понятием математического ожидания случайной величины; представление о законе больших чисел и о роли закона больших чисел в природе и в социальных явлениях.

В новом ФГОС основного общего образования наиболее четко определены требования к предметным результатам освоения, в частности конкретизированы умения, которыми должны овладеть обучающиеся к концу обучения.

Изучение и обобщение опыта работы учителей математики общеобразовательных школ показывает, что учащиеся испытывают

трудности при освоении данных разделов, а учителя – при объяснении данного материала. Основной причиной тому, как показали результаты анкетирования, является недостаточная оснащённость учебно-методическими, дидактическими материалами.

Пособие состоит из трех глав: элементы комбинаторики, элементы теории вероятностей и элементы математической статистики. Каждый раздел содержит теоретическую и практическую части, приводятся примеры решения задач. Все представленные материалы, как в теоретической, так и практической части имеют методическое сопровождение.

Все разделы соответствуют структуре и стандартам необходимого содержания школьного курса по данным разделам.

ГЛАВА 1

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Человеку часто приходится иметь дело с задачами, в которых нужно подсчитать число всех возможных способов расположения некоторых предметов или число всех возможных способов осуществления некоторого действия. Разные пути или варианты, которые приходится выбирать человеку, складываются в самые разнообразные комбинации.

В знаменитой басне Крылова «Квартет» «Проказница Мартышка, Осёл, Козёл да косолапый Мишка» устроили любопытный эксперимент, они исследовали влияние взаимного расположения музыкантов на качество исполнения. И если бы не вмешался Соловей, участники квартета, наверное, перепробовали бы все возможные варианты.

Зададимся вопросом: сколько существует способов, чтобы рассадить, например в один ряд, четырех музыкантов?

Другой случай. Воспетый Маяковским «молоткастый» советский паспорт имел серию и номер, состоящие в общей сложности из трёх частей:

1. Некоторое число, записанное римскими цифрами;
2. Две русские буквы;
3. Шесть арабских цифр.

Например, IV - АВ № 057982. Разумеется, все паспорта должны иметь разные номера. Сколько может быть различных паспортов?

Третья ситуация. Нас приглашают сыграть в Лото-Миллион. Суть игры в том, что нужно из 49 номеров угадать 6, которые выпадут во время тиража. Для участия в игре следует приобрести специальную карточку и вычеркнуть в ней 6 любых квадратов, пронумерованных числами от 1 до 49. Чтобы выиграть наверняка, можно было бы запастись таким количеством карточек, какое необходимо для вычеркивания 6 номеров всеми возможными способами. Сколько этих способов?

Общее у всех трёх задач то, что их решением занимается отдельная область математики, называемая комбинаторикой. «Особая примета» комбинаторных задач – вопрос, который всегда можно сформулировать так, чтобы он начинался словами: «Сколькими способами....».

В повседневной жизни нередко перед нами возникают проблемы, которые имеют не одно, а несколько различных вариантов решения. Чтобы сделать правильный выбор, очень важно не упустить ни один из них. Для этого надо осуществить перебор всех возможных вариантов или хотя бы подсчитать их число. Такого рода задачи называют *комбинаторными*.

С задачами, в которых приходилось выбирать те или иные предметы, располагать их в определённом порядке и отыскивать среди разных расположений наилучшие, люди столкнулись ещё в доисторическую эпоху. Ещё первобытный вождь понимал, что у десятка охотников вероятность поразить копьём зубра гораздо больше, чем у одного. Поэтому и охотились тогда коллективно.

Неосновательно было бы думать, что такие древние полководцы, как Александр Македонский или Дмитрий Донской, готовясь к сражению, уповали только на доблесть и искусство воинов. Несомненно, они на основании наблюдений и опыта военного руководства умели как-то оценить вероятность своего возвращения со щитом или на щите, знали, когда принимать бой, когда уклониться от него. Они не были рабами случая, но вместе с тем, они были ещё очень далеки от комбинаторики и теории вероятностей.

Позднее, с опытом, человек всё чаще стал взвешивать случайные события, классифицировать их исходы как невозможные, возможные и достоверные. Он заметил, что случайностями не так уж редко управляют объективные закономерности.

Наиболее интересные для начинающих задачи комбинаторики и теории вероятностей возникли в области азартных игр. Этому, по-видимому, способствовало наличие монеты или игральной кости.

Одним из первых занялся подсчетом числа различных комбинаций при игре в кости итальянский математик Тарталья. Он составил таблицу, показывавшую, сколькими способами могут выпасть p костей. Однако при этом не учитывалось, что одна и та же сумма очков может быть получена разными способами.

Со временем появились различные игры (нарды, карты, шашки, шахматы и т.д.). В каждой из этих игр приходилось рассматривать различные сочетания фигур, и выигрывал тот, кто их лучше изучил, знал выигрышные комбинации и умел избегать проигрышных. Не только азартные игры давали пищу для комбинаторных размышлений математиков. Еще с давних пор дипломаты, стремясь к тайне переписки, изобретали сложные шифры, а секретные службы других государств пытались эти шифры разгадать. Стали применять шифры, основанные на комбинаторных принципах, например, на различных перестановках букв с использованием ключевых слов и т. д.

Как раздел математики комбинаторика возникла в XVI веке, так как для решения вероятностных задач необходимо было подсчитать число различных комбинаций элементов. Первые научные исследования по комбинаторике принадлежат итальянским ученым Дж. Кардано, Н. Тарталье (ок. 1499-1557 гг.), Г. Галилею (1564-1642 гг.) Дальнейшее развитие комбинаторики связано с трудами Б. Паскаля (1623 – 1662 гг.) и П. Ферма (1601 – 1665 гг.) по теории азартных игр. Позднее крупный вклад в развитие комбинаторных методов был сделан Г. Лейбницем (1646 – 1716 гг.), Я. Бернулли (1654 – 1705 гг.) и Л. Эйлером (1707 – 1783 гг.). В их работах были даны определения основных понятий комбинаторики, развиты первые комбинаторные методы и указаны их применения, а также прослежена связь комбинаторики с исчислением вероятностей. Именно комбинаторика послужила фундаментальной основой началам теории вероятностей. Немецкий учёный Г.Лейбниц в своей работе «Об искусстве комбинаторики», опубликованной в 1666 г., впервые выделил комбинаторику как самостоятельный раздел математики. Он также впервые ввел термин «комбинаторика».

Возрождение интереса к комбинаторике относится к 50-м годам XX века. Это связано с развитием кибернетики и дискретной математики. Возможность использовать ЭВМ активизировала интерес к классическим комбинаторным задачам.

1. Основные правила комбинаторики.

Факториалом натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел меньших или равных n : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

При этом полагают $0! = 1$.

Например, $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Из определения факториала вытекает следующее свойство:

$$(n+1)! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}_{n!} \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1).$$

Например, $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 9! \cdot 10$.

Пример 1. Преобразовать выражение $\frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}$.

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!} &= \frac{(n+1)! \cdot (n+2) + (n+1)!}{(n+1)! \cdot (n+2) \cdot (n+3)} = \frac{(n+1)! \cdot (n+2+1)}{(n+1)! \cdot (n+2) \cdot (n+3)} = \\ &= \frac{(n+1)! \cdot (n+3)}{(n+1)! \cdot (n+2) \cdot (n+3)} = \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующие задачи:

Задача 1. На подносе лежат 5 яблок и 3 груши. Сколькими способами можно выбрать фрукт с подноса?

Решение. Яблоко можно выбрать пятью способами. Грушу можно выбрать тремя способами. Стало быть, один из этих фруктов можно выбрать $5 + 3 = 8$ способами.

Задача 2. На полке стоят десять томов Пушкина, четыре тома Лермонтова и шесть томов Гоголя. Сколькими способами можно выбрать с полки одну книгу?

Решение. Понятно, что $10 + 4 + 6 = 20$ способами.

Вы уже, несомненно, уловили суть первого правила комбинаторики — правила суммы. Остаётся дать его строгую формулировку.

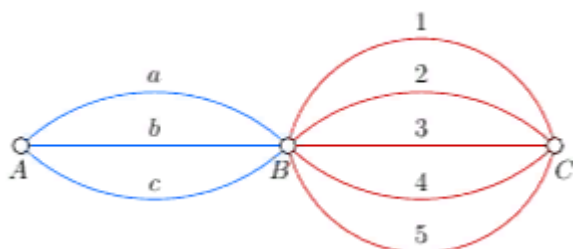
Правило суммы. Если элемент a можно выбрать n способами, элемент b можно выбрать m способами, причем ни один из способов выбора элемента a не совпадает со способом выбора элемента b , то выбор «или a , или b » можно осуществить $n + m$ способами.

Данное правило можно перенести и на случай k непересекающихся множеств: если элемент A_1 можно выбрать n_1 способами, элемент A_2 — n_2 способами, ..., элемент A_k — n_k способами, причем ни один из способов выбора каждого элемента не совпадает со способами выбора всех отличных от него элементов, то выбор «или A_1 , или A_2 , или ..., или A_k » можно осуществить $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ способами.

При решении комбинаторных задач часто приходится умножать число способов выбора одного объекта на число способов выбора другого объекта. Рассмотрим некоторые примеры.

Задача 3. Имеются три города: A , B и C . Из A в B ведут три дороги, из B в C — пять дорог. Сколько различных путей ведут из A в C ? Прямого пути между A и C нет.

Решение. Обозначим дороги буквами и цифрами. Именно, дороги из A в B назовём a , b , c ; дороги из B в C назовём 1, 2, 3, 4, 5.



Тогда любой маршрут из A в C получает уникальное имя в виде пары из буквы и цифры. Например, маршрут $b4$ означает, что из A и B мы пошли по дороге b , а из B в C — по дороге 4.

Выпишем все такие пары в виде таблицы

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
c_1	c_2	c_3	c_4	c_5

Всего получилось $3 \cdot 5 = 15$ маршрутов. Как видим, число маршрутов равно произведению числа дорог из A в B на число дорог из B в C .

Задача 4. В магазине есть 7 видов пиджаков, 5 видов брюк и 4 вида галстуков. Сколькими способами можно купить комплект из пиджака, брюк и галстука?

Решение. Предположим, что пиджак уже выбран (это можно сделать 7 способами). К пиджаку выбираем брюки 5 способами. Итого пару (пиджак, брюки) можно выбрать $7 \cdot 5$ способами. К этой паре можно купить галстук 4 способами. Следовательно, для покупки пиджака, брюк и галстука имеется $7 \cdot 5 \cdot 4 = 140$ способов.

Задача 5. Сколько существует пятизначных чисел, у которых все цифры чётные?

Решение. Представим себе пять последовательных позиций для цифр пятизначного числа.

На первую позицию можно поставить четыре цифры: 2, 4, 6 или 8. На вторую позицию можно поставить пять цифр: 0, 2, 4, 6 или 8. На третью, четвёртую и пятую позиции можно поставить те же пять цифр: 0, 2, 4, 6 или 8. Всего имеем $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2500$ вариантов заполнения позиций; именно столько и будет искомым чисел.

Строгая формулировка второго правила комбинаторики — правила произведения:

Правило произведения. Если элемент a можно выбрать n способами, и если после каждого такого выбора элемент b можно выбрать m способами, то выбор упорядоченной пары (a, b) , т.е. выбор «и a , и b » можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Это правило распространяется и на случай выбора упорядоченной последовательности любой длины: если элемент A_1 можно выбрать n_1 способами, затем для каждого из таких выборов элемента A_1 другой элемент A_2 может быть выбран n_2 способами, затем для каждого из таких выборов и элемента A_1 , и элемента A_2 , элемент A_3 может быть выбран n_3 способами и т.д., включая k -й элемент A_k , который может быть выбран n_k способами, то выбор «и A_1 , и A_2 , ..., и A_k » можно осуществить $n = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ способами.

Рассмотренные правила используются для решения задач и при выводе комбинаторных формул.

2. Размещения, перестановки и сочетания.

Если из данного множества предметов выбирается некоторое его подмножество, то его называют *выборкой*. Выборки бывают *упорядоченные* и *неупорядоченные*. В упорядоченной выборке существенен порядок, в котором следуют ее элементы, другими словами, изменив порядок элементов, мы получим другую выборку.

Например, из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляем трехзначные числа 123, 431, 524, ...и т.д. Это упорядоченные трехэлементные выборки, ведь 123 и 132 - разные числа. Другой пример: из 20 учащихся класса будем выбирать двух дежурных. Любая пара дежурных представляет собой неупорядоченную двухэлементную выборку, так как порядок их выбора не важен.

Таким образом, наборы элементов могут отличаться друг от друга либо составом элементов, либо порядком их следования в наборе, либо и тем и другим вместе. По этим признакам все комбинации делятся на три типа:

- сочетания – состав может отличаться, а порядок следования элементов в наборе не существен;
- размещения – отличаются друг от друга и составом элементов и порядком их следования;
- перестановки – порядок элементов важен, а состав меняться не может.

Рассмотрим более подробно каждую комбинацию.

2.1. Сочетания с повторениями и без повторений.

Рассмотрим следующую ситуацию: ученикам дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Необходимо из них выбрать и прочитать 5 книги. Так, имеется множество, состоящее из 10 книг. Читателю неважно, в каком порядке их брать, важно только их количество – 5. Таким образом, речь идет о наборах, состоящих из 5 элементов (книги для прочтения), выбранных из данных 10 элементов (10 книг по списку), причем наборы отличаются друг от друга составом (варианты выбора 5 книг должны отличаться хотя бы одной книгой), а порядок следования элементов неважен (не важно, в каком порядке будут прочитаны выбранные книги). Такие наборы называются сочетаниями.

Определение 1. *Сочетаниями из n элементов по k называются наборы, состоящие из k элементов, выбранных из данных n элементов, причем наборы отличаются лишь составом элементов в них, порядок следования элементов не существен.*

Замечание 1. Сочетания являются единственной комбинацией, в которой порядок следования элементов не важен.

Определение 2. *Сочетаниями без повторений называются сочетания, в которых все элементы различны. Количество всех возможных сочетаний без повторений из n элементов по k обозначается C_n^k .*

Пример 2. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$. Выписать все сочетания без повторений из 3 по 2.

Решение. Согласно определению, сочетания без повторений из 3 по 2 представляют собой двухэлементные подмножества множества A : $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$. Их количество равно 3. Следовательно, $C_3^2 = 3$. Заметим, что различные сочетания отличаются хотя бы одним элементом.

Теорема 1.
$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}.$$

Пример 3. Сколькими способами из 30 студентов группы можно выбрать делегацию, состоящую из 3 человек?

Решение. Поскольку в делегацию не может входить один и тот же студент дважды, то речь идет о комбинациях без повторений. Кроме того, делегация является неупорядоченным множеством. Так как единственным типом комбинаций, в которых не важен порядок элементов, является сочетание, то в задаче идет речь о сочетаниях без повторений из 30 элементов по 3. Поэтому искомое число S способов выбора делегации будет равно $S = C_{30}^3 = \frac{30!}{3! \cdot 27!} = 4060$ (способов).

Определение 3. Сочетаниями с повторениями называются сочетания, в которых некоторые элементы (или все) могут быть одинаковыми. Количество всех возможных сочетаний с повторениями из n элементов по k обозначается $\overline{C}_n^k$.

Пример 4. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$. Выписать все сочетания с повторениями из 3 по 3.

Решение. Выпишем все наборы из трех элементов, каждый из которых принадлежит множеству A : $111, 112, 113, 122, 123, 133, 222, 223, 233, 333$. Посчитав все перечисленные наборы, получим $\overline{C}_3^3 = 10$.

Теорема 2. $\overline{C}_n^k = \frac{(n + k - 1)!}{k! (n - 1)!}$.

Пример 5. В технической библиотеке имеются книги по математике, физике, химии и т. д., всего по 16 разделам науки. Поступили очередные 4 заказа на литературу. Сколько существует вариантов такого заказа?

Решение. Так как 4 заказанные книги могут быть и из одного раздела науки, и из разных разделов, при этом порядок выбора разделов не важен, то число вариантов заказа определяется числом сочетаний с повторениями из 16 элементов по 4, т. е. $\overline{C}_{16}^4 = \frac{(16 + 4 - 1)!}{4! (16 - 1)!} = \frac{19!}{4! \cdot 15!} = \frac{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 2 \cdot 17 \cdot 6 \cdot 19 = 3876$.

2.2. Размещения с повторениями и без повторений.

Посчитаем, сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 при условии, что в каждой записи нет одинаковых цифр. Перебором можем убедиться в том, что из четырёх цифр 1, 2, 3, 4 можно составить 12 двузначных чисел, удовлетворяющих условию:

12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43.

Второй способ решения основан на правиле произведения: в записи двузначного числа на первом месте может стоять любая из данных четырёх цифр, а на втором – любая из трёх оставшихся. Значит, таких двузначных чисел $4 \cdot 3 = 12$.

При решении данной задачи из четырёх данных элементов (цифр 1, 2, 3, 4) были образованы всевозможные соединения по два элемента в каждом, причем любые два соединения отличались либо составом элементов (например, 12 и 24), либо порядком их расположения (например, 12 и 21). Каждый набор содержит два элемента, которые выбирались из данных четырех элементов. По условию, элементы в наборах не повторяются. Такие соединения называют размещениями без повторений.

Определение 4. *Размещениями из n элементов по k называются наборы, состоящие из k элементов, выбранных из данных n элементов, причем наборы отличаются как составом элементов в них, так и порядком следования элементов.*

Замечание 2. В размещениях порядок следования элементов является существенным.

Определение 5. *Размещениями без повторений* называются размещения, в которых все элементы различны. Количество всех возможных размещений без повторений из n элементов по k обозначается A_n^k .

Пример 6. Пусть имеется множество, содержащее 4 буквы: {A, B, C, D}. Записать все возможные размещения без повторений из 4 указанных букв по две.

Решение. Таких размещений 12: (AB), (AC), (AD), (BC), (BD), (BA), (CA), (CB), (CD), (DA), (DB), (DC). Заметим, что размещения отличаются порядком входящих в них элементов и их составом. Размещения AB и BA содержат одинаковые буквы, но порядок их расположения различен.

Теорема 3. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$

Пример 7. В некоторой газете 12 страниц. Необходимо на страницах этой газеты поместить четыре фотографии. Сколькими способами можно это сделать, если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии?

Решение. В данной задаче важно не только то, какие выбраны страницы, но и в каком порядке (для расположения фотографий). Таким образом, задача сводится к классической задаче об определении числа размещений без повторений из 12 элементов по 4 элемента

$$\overline{A}_{12}^4 = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 11880.$$

Таким образом, 4 фотографии на 12 страницах можно расположить 11880 способами.

Определение 6. Размещениями с повторениями называются размещения, в которых некоторые элементы (или все) могут быть одинаковыми. Количество всех возможных размещений с повторениями из n элементов по k обозначается $\overline{A}_n^k$

Пример 8. Пусть имеется множество, содержащее 2 буквы {A, B}. Записать все возможные размещения с повторениями из 4-х букв.

Решение. Таких размещений 16: (AAAA), (BBBB), (AAAB), (AABA), (ABAA), (BAAA), (AABB), (ABAB), (BABA), (BBA A), (ABBA), (BAAB), (BBBA), (BBAB), (BABB), (ABBB).

Теорема 4. $\overline{A}_n^k = n^k.$

Пример 9. Сколько существует четырехзначных номеров машин из 9 цифр?

Решение. Поскольку машина может иметь, к примеру, номер 2222, то в задаче идет речь о комбинациях с повторениями. Так как 2345 и 3245 – различные номера, то рассматриваются комбинации, в которых важен порядок элементов. А именно, номер машины представляет собой набор из 4 элементов, составленный из данных 9 элементов $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, т.е. представляет собой размещение с повторениями из 9 элементов по 4. Тогда число S всех таких номеров будет равно $S = \overline{A}_9^4 = 9^4 = 6561$ (номеров).

2.3. Перестановки с повторениями и без повторений.

Посчитаем, сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 4 при условии, что в каждой записи нет одинаковых цифр. Перебором можем убедиться в том, что из трёх цифр 1, 2, 4 можно составить 6 трехзначных чисел, удовлетворяющих условию: 124, 142, 214, 241, 412, 421. Очевидно, что данные наборы отличаются лишь порядком следования элементов в них, состав элементов одинаков. Такие комбинации называются перестановками.

Определение 7. *Перестановками из n элементов* называются наборы, состоящие из данных n элементов, отличающиеся друг от друга лишь порядком следования элементов.

Замечание 3. *В перестановках порядок следования элементов является существенным.* В этом перестановки сходны с размещениями.

Отличие перестановок от размещений состоит в том, что *все перестановки имеют одинаковый состав* – данные n элементов, *в размещениях состав элементов может быть различным*, т.е. можно получать новые размещения, исключая из них одни элементы, заменяя их другими.

Определение 8. *Перестановками без повторений* называются перестановки, в которых все элементы различны. Количество всех возможных перестановок без повторений из n элементов обозначается P_n .

Пример 9. Пусть имеется множество букв $\{A, B, C\}$. Записать все возможные перестановки.

Решение. Этому множеству букв соответствует 6 перестановок: (ABC), (ACB), (BAC), (BCA), (CBA), (CAB).

Теорема 5. $P_n = n!$.

Пример 10. Сколькими способами можно расположить 5 различных книг на книжной полке?

Решение. Поскольку все книги различны, то в задаче идет речь о комбинациях без повторений. Искомое число S способов расстановки книг равно числу способов расставить в некотором порядке 5 элементов, т.е. числу перестановок без повторений из 5 элементов, то есть $S = 5! = 80$ (способов).

Определение 9. Перестановками с повторениями типа $\{k_1, k_2, \dots, k_s\}$ называются перестановки, в которых элемент 1-го вида повторяется k_1 раз, элемент 2-го вида повторяется k_2 раз, ..., элемент s -го вида повторяется k_s раз. Количество всех возможных перестановок с повторениями типа $\{k_1, k_2, \dots, k_s\}$ обозначается $\overline{P_{k_1, k_2, \dots, k_s}}$.

Теорема 6. $\overline{P_{k_1, k_2, \dots, k_s}} = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_s)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_s!}$

Пример 11. Сколько различных слов можно составить из букв слова «ОКНО»?

Решение. В слове «окно» встречаются элементы трех типов: «о», «к», «н». Поскольку элемент «о» встречается дважды, то данное слово является комбинацией с повторениями, причем в этой комбинации важен порядок элементов. Пусть «о» - элемент 1-го типа, «к» - элемент 2-го типа, «н» - элемент 3-го типа. Тогда слово «окно» представляет собой перестановку с повторениями типа 2,1,1, а искомое число S составляемых слов равно числу таких перестановок $S = \overline{P_{2,1,1}} = \frac{(2 + 1 + 1)!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{4!}{2} = 12$ (слов).

3. Свойства сочетаний без повторений.

Бином Ньютона. Треугольник Паскаля.

Рассмотрим некоторые свойства сочетаний:

Свойство 1. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Действительно, $C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, $C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$.

Таким образом, $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Свойство 2. $C_n^n = 1$, $C_n^0 = 1$.

Очевидно, что $C_n^n = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{1}{1} = 1$, $C_n^0 = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = \frac{1}{1} = 1$.

Свойство 3. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Вычислим C_n^k по свойству 3.

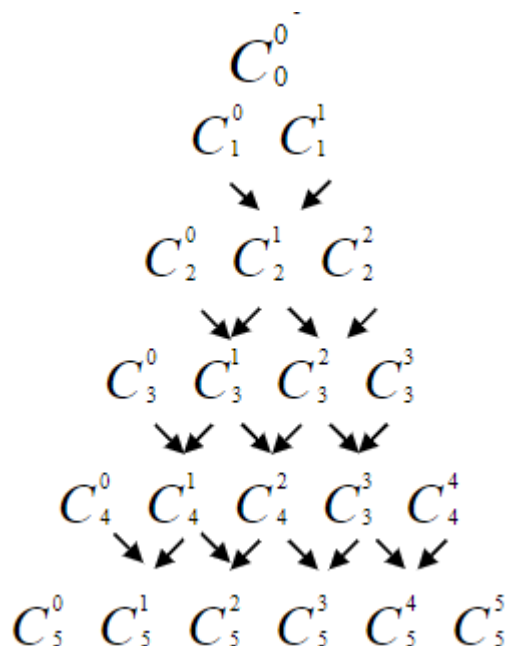
$$C_1^0 = 1, C_1^1 = 1$$

$$C_2^1 = C_1^1 + C_1^0 = 2, C_2^2 = 1$$

$$C_3^1 = C_2^1 + C_2^0 = 3, C_3^2 = 3$$

$$C_4^1 = C_3^1 + C_3^0 = 4, C_4^2 = C_3^2 + C_3^1 = 6 \text{ и так далее.}$$

Данные вычисления располагают в виде треугольника, который называется треугольником Паскаля:



Блез Паскаль (1623-1662) сыграл важную роль в развитие комбинаторики. В частности, он исследовал свойства треугольной числовой таблицы, получившей наименование «треугольник Паскаля».

					1							
					1		1					
				1		2		1				
			1		3		3		1			
		1		4		6		4		1		
	1		5		10		10		5	1		
1		6		15		20		15	6	1		
1	7		21		35		35	21	7	1		
1	8	28		56		70		56	28	8	1	
1	9	36	84		126		126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210		252		210	120	45	10	1

В основе образования таблицы лежит «закон Паскаля», заключающийся том, что каждое число является суммой двух ближайших к нему чисел предыдущей строки. Это следует из свойства 3 сочетаний.

Члены каждой строки треугольника Паскаля нумеруются слева направо, начиная с нулевого. Так, второе место пятой строки занимает число 10.

Треугольник Паскаля – это бесконечная числовая таблица, в которой по боковым сторонам стоят единицы и всякое число, кроме этих боковых единиц, получается как сумма двух предшествующих чисел.

К поздним временам можно отнести и Ньютона, имя которого связано с формулой бинома $(a + b)^n$. Бином Ньютона – это формула разложения произвольной натуральной степени двучлена $(a + b)^n$ в многочлен. Ньютон указал в 1676 г. способ обобщения этой формулы на случай произвольного рационального (в том числе отрицательного) показателя.

Теорема 7 (Бином Ньютона). Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\begin{aligned} (a + b)^n &= C_n^0 a^{n-0} b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n a^{n-n} b^n = \\ &= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k. \end{aligned}$$

Замечание 4. Числа C_n^k называют *биномиальными коэффициентами*.

Пример 12. Разложить в сумму выражение: $(2x - 3y)^5$.

Решение. По формуле бинома Ньютона получим:

$$\begin{aligned}(2x - 3y)^5 &= C_5^0 (2x)^{5-0} (-3y)^0 + C_5^1 (2x)^{5-1} (-3y)^1 + C_5^2 (2x)^{5-2} (-3y)^2 + C_5^3 (2x)^{5-3} (-3y)^3 + \\ &+ C_5^4 (2x)^{5-4} (-3y)^4 + C_5^5 (2x)^{5-5} (-3y)^5 = \\ &= (2x)^5 (-3y)^0 + 5(2x)^4 (-3y)^1 + 10(2x)^3 (-3y)^2 + 10(2x)^2 (-3y)^3 + 5(2x)(-3y)^4 + (2x)^0 (-3y)^5 = \\ &= 32x^5 - 240x^4y + 240x^3y^2 - 1080x^2y^3 + 810xy^4 - 243y^5.\end{aligned}$$

Свойство 4. $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$.

Действительно, по формуле бинома Ньютона получим

$$\begin{aligned}2^n &= (1+1)^n = C_n^0 \cdot 1^{n-0} \cdot 1^0 + C_n^1 \cdot 1^{n-1} \cdot 1^1 + C_n^2 \cdot 1^{n-2} \cdot 1^2 + \dots + C_n^n \cdot 1^{n-n} \cdot 1^n = \\ &= C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = \sum_{k=0}^n C_n^k.\end{aligned}$$

Таким образом, можно обобщить основные свойства бинома Ньютона:

1. Сумма показателей степени при a и b в каждом члене разложения равна n .
2. Правая часть формулы Ньютона содержит $(n+1)$ слагаемых.
3. Общий член разложения T_{k+1} имеет вид $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, где $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

T обозначает член разложения, а индекс $(k+1)$ — его порядковый номер в разложении бинома, считая слева направо. Так,

$$1\text{-й член } T_1 \text{ получим, если } k=0 : T_1 = T_{0+1} = C_n^0 a^{n-0} b^0,$$

$$2\text{-й член } T_2 \text{ получим, если } k=1 : T_2 = T_{1+1} = C_n^1 a^{n-1} b^1,$$

.....

$$n\text{-й член } T_n \text{ получим, если } k=n-1 : T_n = T_{n-1+1} = C_n^{n-1} a^{n-(n-1)} b^{n-1},$$

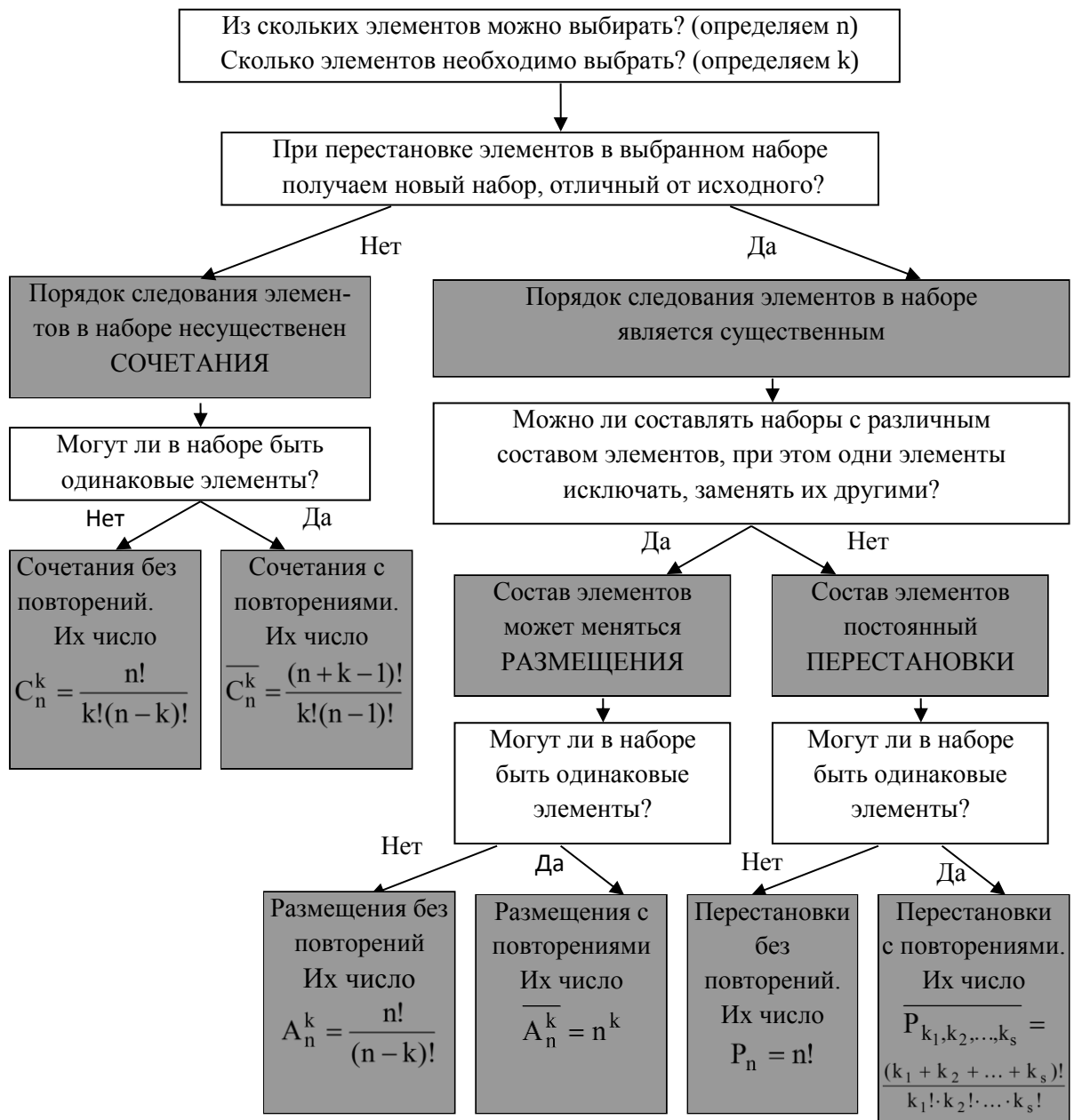
$$(n+1)\text{-й член } T_{n+1} \text{ получим, если } k=n : T_{n+1} = T_{n+1} = C_n^n a^{n-n} b^n = b^n.$$

4. Биномиальные коэффициенты членов разложения, равноотстоящие от концов разложения, равны между собой.

5. Сумма биномиальных коэффициентов членов разложения равна 2^n .

4. Решение типовых задач.

При решении большинства комбинаторных задач будем использовать следующую схему рассуждений.



ГЛАВА 2

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

История возникновения теории вероятностей.

Французский дворянин, некий господин де Мере, был азартным игроком в кости и страстно хотел разбогатеть. Он затратил много времени, чтобы открыть тайну игры в кости. Он выдумывал различные варианты игры, предполагая, что таким образом приобретет крупное состояние. Так, например, он предлагал бросать одну кость по очереди 4 раза и убеждал партнера, что по крайней мере один раз выпадет при этом шестерка. Если за 4 броска шестерка не выходила, то выигрывал противник.

В те времена еще не существовала отрасль математики, которую сегодня мы называем теорией вероятностей, а поэтому, чтобы убедиться, верны ли его предположения, господин Мере обратился к своему знакомому, известному математику и философу Б. Паскалю с просьбой, чтобы он изучил два знаменитых вопроса, первый из которых он попытался решить сам. Вопросы были такие:

Сколько раз надо бросать две игральные кости, чтобы случаев выпадения сразу двух шестерок было больше половины от общего числа бросаний?

Как справедливо разделить поставленные на кон двумя игроками деньги, если они по каким-то причинам прекратили игру преждевременно?

Паскаль не только сам заинтересовался этим, но и написал письмо известному математику П. Ферма, чем спровоцировал его заняться общими законами игры в кости и вероятностью выигрыша.

Таким образом, азарт и жажда разбогатеть дали толчок возникновению новой чрезвычайно существенной математической дисциплины: теории вероятностей. В разработке ее основ принимали участие математики такого масштаба, как Паскаль и Ферма, Гюйгенс (1629—1695), который написал тракта «О расчетах при азартных играх», Яков Бернулли (1654—1705),

Муавр (1667—1754), Лаплас (1749— 1827), Гаусс (1777—1855) и Пуассон (1781—1840). В наше время теория вероятности используется почти во всех отраслях знаний: в статистике, синоптике (прогноз погоды), биологии, экономике, технологии, строительстве и т. д.

В XVII веке начало формироваться отчётливое представление о проблематике теории вероятностей и появились первые математические (комбинаторные) методы решения вероятностных задач. Основателями математической теории вероятностей стали Блез Паскаль и Пьер Ферма. В XIX веке число работ по теории вероятностей продолжало расти, были даже компрометирующие науку попытки распространить её методы далеко за разумные пределы — например, на область морали, психологии, правоприменения и даже богословия. В частности, валлийский философ Ричард Прайс, а следом за ним и Лаплас, считали возможным рассчитать по формулам Байеса вероятность предстоящего восхода Солнца, Пуассон пытался провести вероятностный анализ справедливости судебных приговоров и достоверности показаний свидетелей. Философ Дж. С. Милль в 1843 году, указав на подобные спекулятивные применения, назвал исчисление вероятностей «позором математики». Эта и другие оценки свидетельствовали о недостаточной строгости обоснования теории вероятностей.

Математический аппарат теории вероятностей тем временем продолжал совершенствоваться. Основной сферой её применения в тот период была математическая обработка результатов наблюдений, содержащих случайные погрешности, а также расчёты рисков в страховом деле и других статистических параметров. Среди главных прикладных задач теории вероятностей и математической статистики XIX века можно назвать следующие:

- найти вероятность того, что сумма независимых случайных величин с одинаковым (известным) законом распределения находится в заданных пределах. Особую важность эта проблема представляла для теории

ошибок измерения, в первую очередь для оценки погрешности наблюдений;

- установление статистической значимости различия случайных значений или серий таких значений. Пример: сравнение результатов применения нового и старого видов лекарств для принятия решения о том, действительно ли новое лекарство лучше;
- исследование влияния заданного фактора на случайную величину (факторный анализ).

Уже к середине XIX века формируется вероятностная теория артиллерийской стрельбы. В большинстве крупных стран Европы были созданы национальные статистические организации. В конце века область применения вероятностных методов начала успешно распространяться на физику, биологию, экономику, социологию.

Применение теории вероятности в XIX-XX веках.

В 19 и 20 столетиях теория вероятностей проникает сначала в науку (астрономию, физику, биологию), потом в практику (сельское хозяйство, промышленность, медицину), и наконец, после изобретения компьютеров, в повседневную жизнь любого человека, пользующегося современными средствами получения и передачи информации. Проследим применение теории вероятностей в различных областях.

1. Астрономия.

Именно для использования в астрономии был разработан знаменитый “метод наименьших квадратов” (Лежандр 1805, Гаусс 1815). Главной задачей, для решения которой он был первоначально использован, стал расчет орбит комет, который приходилось производить по малому числу наблюдений. Ясно, что надежное определение типа орбиты (эллипс или гипербола) и точный расчет ее параметров оказывается трудным, так как орбита наблюдается лишь на небольшом участке. Метод оказался эффективным, универсальным, и вызвал бурные споры о приоритете. Его

стали использовать в геодезии и картографии. Сейчас, когда искусство ручных расчетов утрачено, трудно представить, что при составлении карт мирового океана в 1880-х годах в Англии методом наименьших квадратов была численно решена система, состоящая из примерно 6000 уравнений с несколькими сотнями неизвестных.

2. Физика.

Во второй половине 19 века в работах Максвелла, Больцмана и Гиббса была развита статистическая механика, которая описывала состояние разряженных систем, содержащих огромное число частиц (порядка числа Авогадро). Если раньше понятие распределения случайной величины было преимущественно связано с распределением ошибок измерения, то теперь распределенными оказались самые разные величины – скорости, энергии, длины свободного пробега.

3. Биометрия.

В 1870-1900 годах бельгиец Кетле и англичане Френсис Гальтон и Карл Пирсон основали новое научное направление – биометрию, в которой впервые стала систематически и количественно изучаться неопределенная изменчивость живых организмов и наследование количественных признаков. В научный оборот были введены новые понятия – регрессии и корреляции.

Итак, вплоть до начала 20 века основные приложения теории вероятности были связаны с научными исследованиями. Внедрение в практику – сельское хозяйство, промышленность, медицину произошло в 20 веке.

4. Сельское хозяйство.

В начале 20 века в Англии была поставлена задача количественного сравнения эффективности различных методов ведения сельского хозяйства. Для решения этой задачи была развита теория планирования экспериментов, дисперсионный анализ. Основная заслуга в развитии этого уже чисто практического использования статистики принадлежит сэру Рональду Фишеру, астроному по образованию, а в дальнейшем фермеру, статистику,

генетику, президенту английского Королевского общества. Современная математическая статистика, пригодная для широкого применения в практике, была развита в Англии (Карл Пирсон, Стьюдент, Фишер). Стьюдент впервые решил задачу оценки неизвестного параметра распределения без использования байесовского подхода.

5. Промышленность.

Введение методов статистического контроля на производстве (контрольные карты Шухарта). Сокращение необходимого количества испытаний качества продукции. Математические методы оказываются уже настолько важными, что их стали засекречивать. Так книга с описанием новой методики, позволявшей сократить количество испытаний (“Последовательный анализ” Вальда), была издана только после окончания второй мировой войны в 1947 году.

6. Медицина.

Широкое применение статистических методов в медицине началось сравнительно недавно (вторая половина 20 века). Развитие эффективных методов лечения (антибиотики, инсулин, эффективная анестезия, искусственное кровообращение) потребовало достоверных методов оценки их эффективности. Возникло новое понятие “Доказательная медицина”. Начал развиваться более формальный, количественный подход к терапии многих заболеваний – введение протоколов, guidelines.

С середины 1980-х годов возник новый и важнейший фактор, революционизировавший все приложения теории вероятностей – возможность широкого использования быстрых и доступных компьютеров. Почувствовать всю громадность произошедшего переворота можно, если учесть, что один современный персональный компьютер превосходит по быстродействию и памяти все компьютеры СССР и США, имевшиеся к 1968 году, времени, когда уже были осуществлены проекты, связанные со строительством атомных электростанций, полетами на Луну, созданием термоядерной бомбы. Сейчас методом прямого экспериментирования можно

получать результаты, которые ранее были недоступны – thinkingofunthinkable.

7.Биоинформатика.

Начиная с 1980-х годов количество известных последовательностей белков и нуклеиновых кислот стремительно возрастает. Объем накопленной информации таков, что только компьютерный анализ этих данных может решать задачи по извлечению информации.

8.Экономика и банковское дело.

Широкое применение имеет теория риска. Теория риска есть теория принятия решений в условиях вероятностной неопределенности. С математической точки зрения она является разделом теории вероятностей, а приложения теории риска практически безграничны. Наиболее продвинута финансовая область приложений: банковское дело и страхование, управление рыночными и кредитными рисками, инвестициями, бизнес-рисками, телекоммуникациям. Развиваются и нефинансовые приложения, связанные с угрозами здоровью, окружающей среде, рисками аварий и экологических катастроф, и другими направлениями.

1. Эксперимент и случайные события.

Все события (явления), с которыми мы сталкиваемся в жизни, можно условно разделить на три вида:

- **достоверные** – события, которые обязательно происходят, если будет осуществлена некоторая совокупность условий;
- **невозможные** – события, которые заведомо не произойдут в результате осуществления некоторой совокупности условий;
- **случайные** – события, которые при осуществлении некоторой совокупности условий могут либо произойти, либо не произойти.

Например, при наступлении зимы выпадение в России снега является событием достоверным; на вырванном наудачу листке нового календаря

появление числа 35 – событие невозможное; проигрыш в шахматной партии, совпадение имен у двух наудачу выбранных людей – события случайные.

Обратим внимание, что о случайных событиях можно говорить только при определенных условиях. Если нет условий, то нет и событий. Например, случайное событие «выпадение орла» возможно только в опыте с подбрасыванием монеты, о случайном событии «электрическая лампочка прослужит более 100 часов» можно говорить, только если имеется лампочка, которую включают в электрическую сеть.

Условия и действия, при которых может наступить случайное событие, будем называть *опытом* или *испытанием*, а событие будем рассматривать как результат испытания. В приведенных выше примерах: «наступление зимы в России» – испытание, «выпадение снега» – событие; «вырывается наудачу лист календаря» – испытание, «появление на листке числа 35» – событие; «проведение шахматной партии» – испытание, «проигрыш» – событие; «выбор наудачу двух людей» – испытание, «совпадение имен» – событие. События будем обозначать большими буквами латинского алфавита.

Определение 1. События A и B называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании. В противном случае события называются *совместными*.

Например, проигрыш и выигрыш в одной шахматной партии – события несовместные. Примером совместных событий являются следующие: на вырванном наудачу листке календаря событие A – «появление четного числа» и событие B – «появление числа 10».

Определение 2. События называются *равновозможными*, если нет оснований считать, что появление одного из них в результате испытания является более возможным, чем остальные.

Например, выигрыш и проигрыш в шахматной партии – равновозможные события. События A и B из вышеприведенного примера

равновозможными не являются, так как появление четного числа на вырванном листке календаря более возможно, чем появление числа 10.

Определение 3. События *образуют полную группу*, если в результате испытания появится хотя бы одно из них.

Из определения 3 следует, что появление в результате испытания хотя бы одного из событий полной группы есть событие достоверное. Например, вышеупомянутые события A и B , и C : «появление на вырванном наудачу листке календаря нечетного числа» образуют полную группу событий, так как в результате испытания наступает либо событие C , либо событие A , либо события A и B одновременно. События «выигрыш в шахматной партии» и «проигрыш в шахматной партии» не образуют полную группу событий, поскольку результатом шахматной партии может быть и «ничья». Отметим, что если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появиться одно и только одно из этих событий. Например, «попадание в цель при выстреле в мишень» и «промах при выстреле в мишень» – несовместные события, образующие полную группу.

2. Элементарные исходы испытания.

Рассмотрим следующий пример. Имеется коробка карандашей, в которой 5 красных и 2 синих карандаша. Из коробки наудачу извлекается один карандаш. Пусть событие A заключается в том, что извлеченный карандаш – красный. Поставим перед собой задачу дать количественную оценку появления события A . Поскольку в коробке находится 7 карандашей, то в результате испытания у нас в руках может оказаться любой из 7 карандашей. Представим себе, что карандаши снабжены номерами от 1 до 7, и карандаши с номерами 1, 2, 3, 4, 5 – красные. Тогда в результате испытания наступит одно и только одно из семи следующих событий: A_1 – «появление карандаша с номером 1», ..., A_7 – «появление карандаша с номером 7».

Отметим, что события $A_1, \dots, A_7$ образуют полную группу равновозможных попарно несовместных событий.

Каждый из возможных результатов испытания называют элементарным исходом испытания (или элементарным событием).

Таким образом, в рассматриваемом примере $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ – элементарные исходы испытания.

Совокупность Ω всех элементарных событий испытания называется *пространством элементарных событий*. Пространство элементарных событий образует полную группу событий.

Те элементарные исходы испытания, в которых интересующее нас событие наступает, называют благоприятствующими этому событию.

Поскольку карандаши с номерами от 1 до 5 – красные, то элементарные исходы A_1, A_2, A_3, A_4 и A_5 являются благоприятствующими для события A .

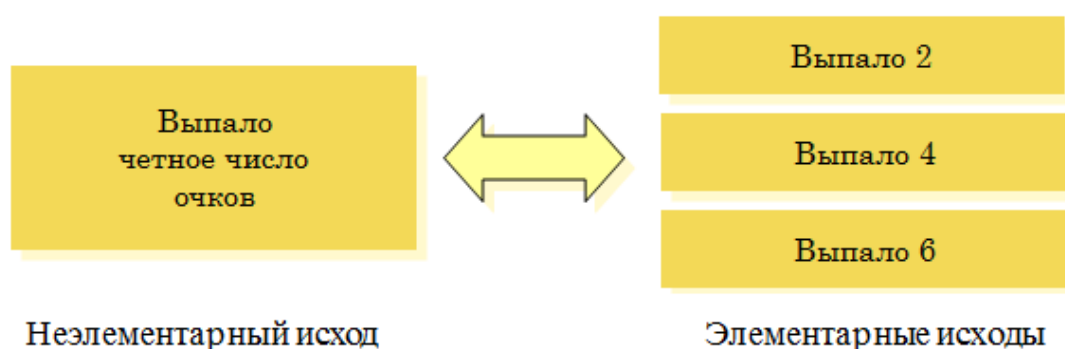
Пример испытания: подбрасывание игральной кости.

Пример исходов: - выпадение единицы;

- выпадение четного числа очков;

- выпадение не менее четырех очков.

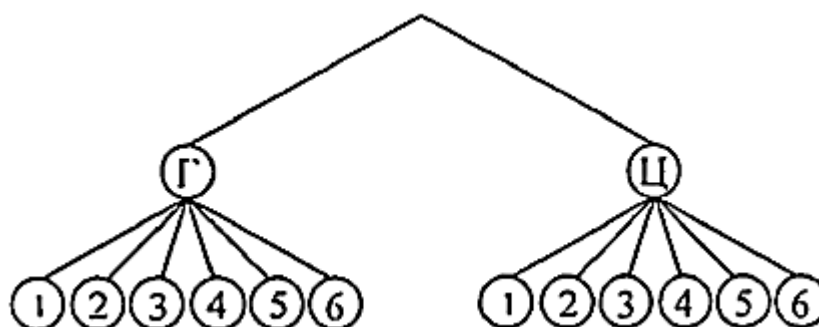
Элементарный исход испытания не может быть разделен на другие исходы. Исход «Выпадение четного числа» не является элементарным, поскольку может быть разделен на исходы «выпадение двойки», «выпадение четверки» и «выпадение шестерки». Эти три исхода являются элементарными.



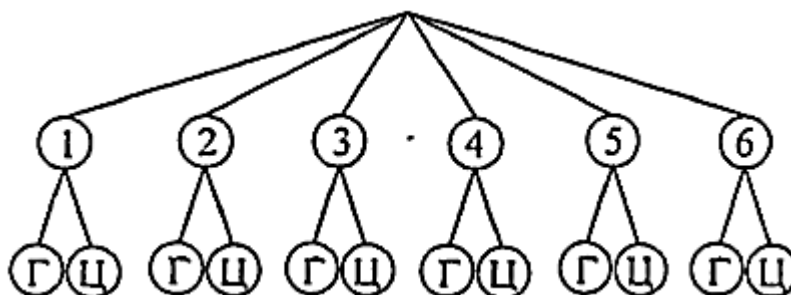
При описании множества элементарных исходов удобно использовать простой и наглядный способ перебора вариантов исходов испытания с применением «деревьев».

Пример 1. Каково множество элементарных исходов при подбрасывании монеты и игральной кости?

Решение. При подбрасывании монеты возможно два исхода - выпадение герба (Г) или цифры (Ц). При подбрасывании игральной кости шесть вариантов исходов, согласно количеству очков выпавших на ее верхней грани (1, 2, 3, 4, 5, 6). Представим элементарные события рассматриваемого эксперимента в виде дерева подсчета. В вершинах первого уровня изобразим результаты подбрасывания монеты, а вершинах второго уровня - результаты подбрасывания игральной кости.



Тогда каждый путь из корня к листьям (в данном дереве — это вершины второго уровня) будет представлять элементарное событие, а количество таких путей - число всех элементарных исходов данного испытания. Как видно из рисунка их 12. Отметим, что возможен и альтернативный вариант построения дерева подсчета:



Таким образом, пространство элементарных событий данного эксперимента

$\Omega = \{(\Gamma, 1), (\Gamma, 2), (\Gamma, 3), (\Gamma, 4), (\Gamma, 5), (\Gamma, 6), (\Pi, 1), (\Pi, 2), (\Pi, 3), (\Pi, 4), (\Pi, 5), (\Pi, 6)\}.$

В некоторых случаях пространство элементарных событий удобно представить в виде таблицы.

Пример 2. Подбрасывается 3 монеты. Построить множество элементарных исходов этого испытания в виде таблицы.

Решение. Подсчитаем количество возможных исходов данного эксперимента. Для каждой монеты возможны два исхода — выпадение герба (Г) или решки (Р). Исход эксперимента для одной монеты может встретиться с любым из двух возможных исходов для второй монеты, а получившийся результат - с любым из двух возможных исходов для третьей монеты. Таким образом, число возможных исходов при подбрасывании трех монет равно $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Зная количество элементарных событий эксперимента, можно заполнять таблицу, описывающую множество элементарных исходов данного испытания:

Монета 1	Монета 2	Монета 3
Г	Г	Г
Р	Г	Г
Г	Р	Г
Г	Г	Р
Р	Р	Г
Р	Г	Р
Г	Р	Р
Р	Р	Р

3. Классическое определение вероятности.

Сравнивая между собой случайные события, мы часто говорим, что одно из них более вероятно, в большей степени возможно, чем другое. Например, проигрыш в шахматной партии – событие более вероятное, чем совпадение имен у двух наудачу выбранных людей. Чтобы придать подобным сравнениям точный количественный смысл, необходимо с каждым событием связать число, выражающее степень возможности появления

данного события. Это число называют *вероятностью события*. Существует несколько определений вероятности. Приведем определение, которое называют классическим.

Определение 4 (классическое определение вероятности).

Отношение числа m благоприятствующих событию A исходов испытания к общему числу n всех равновозможных попарно несовместных элементарных исходов, образующих полную группу, называется *вероятностью события*

A и обозначается $P(A)$, то есть $P(A) = \frac{m}{n}$ (1).

Пример 3. В магазин поступило 40 новых цветных телевизоров, среди которых 7 имеют скрытые дефекты. Наудачу отбирается один телевизор для проверки. Какова вероятность, что он не имеет скрытых дефектов?

Решение. Число телевизоров, не имеющих скрытых дефектов, равно $m = 40 - 7 = 33$. Число всех элементарных исходов всех поступивших телевизоров равно $n = 40$. Следовательно, по классическому определению вероятности вероятность того, что отобранный телевизор не имеет скрытых дефектов (событие A), равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{33}{40} = 0,825.$$

Рассмотрим некоторые важные свойства вероятности.

Лемма 1. Вероятность достоверного события равна единице.

Доказательство. Пусть U – достоверное событие. Тогда в результате испытания оно обязательно произойдет. Это означает, что каждый элементарный исход испытания будет благоприятствующим событию U .

Следовательно, $P(U) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$. Лемма доказана.

Лемма 2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Доказательство. Пусть V – невозможное событие. Тогда в результате испытания оно никогда не произойдет, и значит, число благоприятствующих

событию V исходов равно нулю. Следовательно, $P(V) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$. Лемма доказана.

Лемма 3. Если A – случайное событие, то $0 < P(A) < 1$.

Доказательство. Так как A – случайное событие, то в результате испытания оно может как наступить, так и не наступить. Поэтому число m благоприятствующих событию A исходов испытания, с одной стороны, больше нуля, а с другой стороны, меньше числа n всех элементарных исходов испытания, то есть $0 < m < n$. Тогда $\frac{0}{n} < \frac{m}{n} < \frac{n}{n}$, и значит, $0 < \frac{m}{n} < 1$. Лемма доказана.

Следствие 3.1. Если A – событие, то $0 \leq P(A) \leq 1$.

Пример 4. Какова вероятность того, что на вырванном наудачу листке нового календаря (на 365 дней) окажется: *а)* четное число; *б)* число 10; *в)* нечетное число.

Решение. Пусть, как и ранее, событие A – «появление четного числа», B – «появление числа 10», C – «появление нечетного числа». Так как в новом календаре всего 365 листков, то число всех элементарных исходов испытания равно 365, то есть $n = 365$, причем все элементарные исходы образуют полную группу равновозможных попарно несовместных событий. Поскольку из 365 дней в году 179 дням соответствуют четные числа, а 186 – нечетные, то событию A благоприятствуют 179 элементарных исходов испытания, а событию C – 186. Тогда $P(A) = \frac{179}{365}$, $P(C) = \frac{186}{365}$. Так как из 365 листков календаря на двенадцати написано число 10, то $P(B) = \frac{12}{365}$.

До сих пор мы рассматривали испытания, в которых покупали один телевизор, вырывали один листок календаря. Ситуация осложняется, если подбрасывают сразу несколько монет, кубиков или вытаскивают несколько шаров. Начнём с опыта, в котором подбрасывают две монеты.

Пример 5. Подбрасывают две монеты. С какой вероятностью они выпадут на одну сторону?

Решение. Знаменитый французский учёный-энциклопедист Жан Лерон Даламбер (1717—1783) вошёл в историю науки не только со своими замечательными математическими результатами и философскими сочинениями, но и с ошибкой, которую он сделал (и долго на ней настаивал), решая эту задачу. Вот его решение.

«Опыт имеет 3 возможных исхода: обе монеты выпадут на орла, обе монеты выпадут на решку, монеты выпадут на разные стороны. Два из этих трёх исходов благоприятны для нашего события, поэтому его вероятность равна $\frac{2}{3}$.»

Только реальный эксперимент смог убедить Даламбера, что частота этого события приближается вовсе не к $\frac{2}{3}$, а к $\frac{1}{2}$.

Дело все в том, что исходы, предложенные Даламбером, не равновозможны. И связано это с тем, что событие «монеты выпадут на разные стороны» не является элементарным. Оно распадается на два исхода: на первой монете орёл, на второй — решка, и наоборот. Таким образом, у этого опыта не 3, а 4 равновозможных исхода. Если обозначить выпадение орла буквой О, а решки — буквой Р, то эти исходы легко перечислить: ОО, ОР, РО, РР. Из этих четырёх исходов два благоприятных для нашего события — это ОО и РР, поэтому вероятность равна $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Приведём более сложный пример, в котором можно привести целых два неправильных решения с разными ответами.

Пример 6. Из коробки, в которой 2 белых и 2 синих шара, вытаскивают два шара. Какова вероятность, что они окажутся одного цвета?



Первое неправильное решение.

Этот опыт имеет три возможных исхода:

	вынули 2 белых шара
	вынули 1 белый и 1 синий шар
	вынули 2 синих шара

Благоприятными для нашего события будут два исхода: 1 и 3, поэтому вероятность равна $\frac{2}{3}$.

В этом решении считали, что шары вынимались одновременно, поэтому не различали, какой из них вынут первым, а какой — вторым.

Если считать, что шары вынимают друг за другом, то получим следующее решение.

Второе неправильное решение.

Этот опыт имеет четыре возможных исхода:

	и первый, и второй шар белые
	первый шар белый, второй шар синий
	первый шар синий, второй шар белый
	и первый, и второй шар синие

Благоприятными для нашего события будут два исхода: 1 и 4, поэтому вероятность равна $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Получили другой ответ и, что удивительно, — опять неправильный!

В чём же дело? Снова в неравновозможности выбранных исходов.

Приведём теперь правильное решение.

Правильное решение.

Пронумеруем шары, находящиеся в коробке:



Этот опыт имеет шесть равновозможных исходов: 12, 13, 14, 23, 24, 34.

Только в двух исходах из шести шары оказываются одного цвета: 12 (оба белые) и 34 (оба синие). Поэтому искомая вероятность равна $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Это и есть правильный ответ, который можно подтвердить экспериментально.

Есть ещё одно правильное решение (разумеется, с тем же ответом). Если мы будем учитывать порядок, в котором вынимаются шары, то количество исходов удвоится и их станет 12: 12, 21, 13, 31, 14, 41, 23, 32, 24, 42, 34, 43. Но теперь и благоприятных исходов будет не 2, а 4, поэтому вероятность останется прежней.

В чём же была причина сделанных ошибок? В неправильных решениях в качестве возможных исходов рассматривались не элементарные события, которые оказались не равновероятными. Чтобы избежать подобных ошибок, при подсчёте исходов опыта нужно различать сами предметы, из которых делается случайный выбор, а не их цвета, размеры или какие-то другие свойства.

Рассмотрим еще два примера.

Пример 7. Бросание симметричной игральной кости. Элементарные исходы эксперимента w_i — выпадение очков на верхней грани, $i = 1, \dots, 6$. Так как кость симметрична, все 6 исходов имеют одинаковые вероятности, равные $1/6$.

Пример 8. Двукратное бросание игральной кости. Исходы (i, j) — выпадение i очков на первой кости и j очков на второй — являются равновероятными с вероятностями, равными $1/36$. Если в качестве исходов взять $[i, j]$ — на одной кости (не важно на какой) выпало i очков, а на другой — j , то такие исходы уже не будут равновероятными. Например, исход $[1, 1]$ совпадает с $(1, 1)$ и имеет вероятность $1/36$, а исход $[1, 2]$ происходит тогда, когда выполняется или $(1, 2)$, или $(2, 1)$ и, следовательно, имеет вероятность $2/36$.

Проверяйте равновозможность исходов эксперимента. Если исходы не являются равновероятными, то эксперимент не будет классической схемой и применять к нему классическое определение вероятности нельзя.

Если возможных исходов опыта немного, можно их просто выписать друг за другом. Иногда существуют и более удобные способы представления — например, таблицы.

Пример 9. Одновременно бросают два кубика — красный и зелёный. Какова вероятность того, что на красном выпадет больше очков, чем на зелёном?

Решение. Исходы этого эксперимента удобно представить в виде следующей таблицы:

к \ з	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

По строкам идут числа для красного кубика, по столбцам — для зелёного. Каждому исходу опыта соответствует клетка таблицы, в которой записано соответствующее двузначное число: первая цифра показывает, сколько очков выпало на красном кубике, а вторая — сколько очков выпало на зелёном. Таким образом, общее количество исходов равно количеству клеток в таблице: $6 \cdot 6 = 36$. Благоприятные исходы можно получить, если посчитать клетки, в которых первая цифра больше второй (они выделены оранжевым фоном). Поскольку этих клеток 15, то вероятность события «на красном кубике выпадет больше очков, чем на зелёном» равна $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

4. Применение формул комбинаторики при решении задач на вероятность.

Изучая понятие вероятности, мы выяснили, что существует довольно широкий круг случайных опытов, в которых вероятность любого события можно вычислить а priori — без проведения экспериментов — по **формуле классической вероятности** $P(A) = \frac{m}{n}$, где n — количество всех исходов испытания, а m — количество исходов, благоприятствующих событию A . Это так называемые опыты с равновозможными исходами.

Однако зачастую количество исходов испытания настолько велико, что перечислить все такие исходы не представляется возможным. Вот здесь и приходят на помощь комбинаторные правила и формулы. Чаще всего это происходит в опытах, где либо участвует много объектов (монет, кубиков, шаров и т.д.), либо с одним и тем же объектом производят многократные действия (монету или кубик бросают несколько раз, несколько раз участвуют в лотерее и т.д.).

Пример 10. 1 сентября на первом курсе одного из факультетов запланированы по расписанию три лекции из 10 различных предметов. Студент, не успевший ознакомиться с расписанием, пытается его угадать. Какова вероятность успеха в данном эксперименте, если считать, что любое расписание из трех предметов равновозможно.

Решение. Студенту необходимо из 10 лекций, которые могут быть поставлены в расписание, причем в определенном порядке, выбрать три. Следовательно, число всех возможных исходов испытания равно числу размещений из 10 по 3, т.е.

$$n = A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720 .$$

Благоприятный же случай только один, т.е. $m = 1$. Искомая вероятность будет равна $P = \frac{m}{n} = \frac{1}{720} \approx 0,0014$.

Пример 11. В подъезде дома установили замок с кодом. Дверь автоматически отпирается, если в определенной последовательности набрать три цифры из возможных десяти. Некто вошел в подъезд и, не зная кода, стал наудачу пробовать различные комбинации из трех цифр. На каждую попытку он тратит 15 секунд. Какова вероятность события $A = \{\text{вошедшему удастся открыть дверь за один час}\}$?

Решение. Так как цифры, входящие в набираемый номер, могут повторяться и порядок их набора играет существенную роль, то мы

приходим к схеме размещений с повторениями. Число возможных вариантов набора трех цифр из 10 возможных равно $\overline{A}_{10}^3 = 10^3$. За один час, тратя на набор комбинации 15 секунд, можно набрать 240 различных комбинаций, т.е.

$$m = 240. \text{ Искомая вероятность } P = \frac{m}{n} = \frac{240}{10^3} = 0,24.$$

Пример 12. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек придется на разные месяцы года.

Решение. Так как каждый из 12 человек может родиться в любом из 12 месяцев года, то число всех возможных вариантов можно посчитать по формуле размещений с повторениями $n = \overline{A}_{12}^{12} = 12^{12}$.

Число благоприятных случаев получим, переставляя месяцы рождения у этих 12 человек, т.е. $m = P_{12} = 12!$.

Тогда искомая вероятность будет равна

$$P = \frac{m}{n} = \frac{12!}{12^{12}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12} = \frac{1925}{12^7} =$$

$$= \frac{1925}{35\,831\,808} \approx 0,00005372.$$

Замечание 1. Анализ и решение задач, в которых вероятность рассматриваемого события вычисляется по формуле классического определения вероятностей, могут быть выполнены по следующей схеме:

- 1) выяснить, в чем состоит испытание, рассматриваемое в задаче;
- 2) сформулировать событие, вероятность наступления которого необходимо найти;
- 3) установить, являются ли исходы испытания попарно несовместными и равновероятными;
- 4) убедиться, что число исходов испытания конечно;
- 5) подсчитать число всех возможных исходов испытания (n);
- 6) подсчитать число исходов испытания, благоприятствующих рассматриваемому событию (m);

7) по формуле классического определения вероятности вычислить искомую вероятность.

5. Геометрическое определение вероятности.

При решении задач на вероятность мы чаще всего пользуемся классическим определением вероятности, то есть находим отношение числа благоприятных нам исходов некоторого опыта к общему числу исходов. Однако есть задачи, в которых благоприятных исходов, равно как и вообще исходов – бесконечно много. Например:

1) Какова вероятность того, что капля из протёкшей крыши попадет на стол, находящийся в комнате?

Если пренебречь размерами капли и считать её точкой, то общее число исходов и число благоприятных исходов будет бесконечным.

2) Есть веревка длиной 5 метров, первый метр которого выкрашен в красный цвет. За ночь веревку в случайном месте перегрызла мышь. Какова вероятность, что она перегрызла веревку в месте красного цвета?

Если считать место разрыва верёвки очень маленьким, то есть принять его за точку, то мы не сможем посчитать количество благоприятных исходов, так как точек на отрезке длиной 5 метров бесконечно много, как и точек на отрезке длиной 1 метр. Для подобных задач вводится определение – **геометрическая вероятность**.

Рассмотрим в качестве пространства элементарных событий Ω произвольную область (на прямой, плоскости или в пространстве), имеющую конечную меру (длину, площадь или объем).

Определение 5. Геометрической вероятностью события A называется отношение меры области A , к мере всей области Ω , то есть

$$P(A) = \frac{\text{мера области } A}{\text{мера области } \Omega}.$$

Если область A – отрезок в пространстве, то мера области A – длина этого отрезка, если область A – некоторая фигура на плоскости, то мера

области A – площадь этой фигуры, если же область A – тело в пространстве, мера области A – объем этого тела.

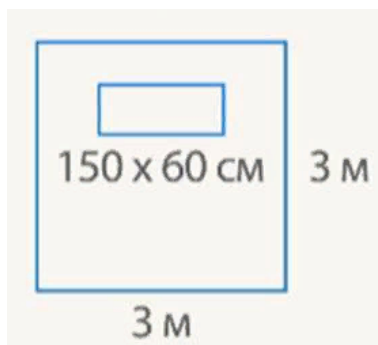
Вернёмся к ранее рассмотренным задачам.

Пример 13. Есть веревка длиной 5 метров, первый метр которого выкрашен в красный цвет. За ночь веревку в случайном месте перегрызла мышь. Какова вероятность, что она перегрызла веревку в месте красного цвета?

Решение. Верёвка имеет длину 5 метров, то есть мера всего множества – 5. Красная зона имеет длину 1 метр, следовательно, мера подмножества – 1. Поэтому вероятность того, что мышка перегрызёт красную зону равна $\frac{1}{5}$.

Пример 14. Какова вероятность того, что капля из протёкшей крыши попадет на стол, находящийся в комнате? Ширина комнаты – 3 м, длина комнаты – 3 м, ширина стола – 60 см, длина стола – 150 см.

Решение. Вопрос данной задачи можно перефразировать следующим образом: какова вероятность того, что случайно выбранная точка квадрата 3 м×3 м будет принадлежать прямоугольнику 150 см×60 см (см. рис.)?



Вычислим меры множеств (в качестве меры выступает площадь, так как в задаче речь идёт о плоскостях):

1) Мера меньшего множества (стола)

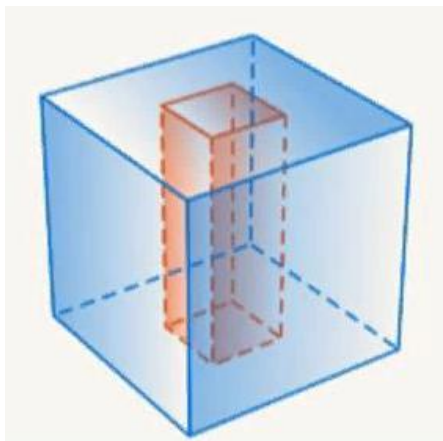
$$S_1 = 150 \cdot 60 = 9000 \text{ см}^2 = 0,9 \text{ м}^2.$$

2) Площадь комнаты $S_2 = 3 \cdot 3 = 9 \text{ м}^2$.

Вероятность того, что капля упадёт на стол равна $p = \frac{0,9}{9} = 0,1$.

Пример 15. Комар находится в закрытой кубической комнате со стороной 3 м. В течение некоторого времени он свободно летает по комнате, после чего он может равновероятно оказаться в любой точке комнаты. Какова вероятность того, что через час он будет находиться на расстоянии не более метра от стены?

Решение. Благоприятные исходы – это когда комар находится на расстоянии не более метра от какой-либо стены. Нам дан куб со стороной 3 м. Разделим его на две зоны - та, в которой для любой точки расстояние до всех стен более метра, и та, в которой лежат все остальные точки комнаты.

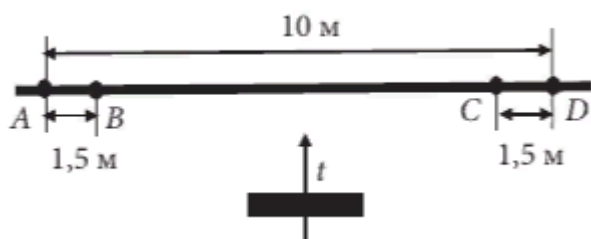


Тогда первая зона – это параллелепипед, в основании которого квадрат $1\text{ м} \times 1\text{ м}$, а высота – 3 м (см. рис.). Объем этого параллелепипеда равен $V_1 = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3\text{ м}^3$. Так как объем всей комнаты – $V = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27\text{ м}^3$, то объем второй зоны равен $V_2 = 27 - 3 = 24\text{ м}^3$.

Следовательно, вероятность того, что комар будет находиться на расстоянии не более метра от стены, будет равна

$$P = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}.$$

Пример 16. Перед окопами вдоль прямой линии через каждые 10 м установлены противотанковые мины. Перпендикулярно этой линии движется танк, ширина которого 3 м. Какова вероятность того, что танк пересечет линию установки мин невредимым, т. е. не взорвется?



Решение. Танк может пересечь линию установки мин в бесконечном числе точек, поэтому данная задача решается с помощью геометрического определения вероятностей. Пусть AD — отрезок между двумя соседними минами (см. рис.). Ось симметрии танка t пересекает один из таких отрезков в любой его точке (т. е. отрезок соответствует множеству всех исходов испытания). Длина AD равна 10 м, $AB = CD = 1,5\text{ м}$. Поскольку длина танка 3 м, то при пересечении танком линии минирования его ось симметрии

(середина) должна находиться на расстоянии от мин, большем 1,5 м, чтобы танк не взорвался. Таким образом, областью, благоприятствующей наступлению события $A = \{\text{танк не взорвался при пересечении линии}\}$, будет отрезок BC , длина которого 7 м. Тогда по формуле геометрического определения вероятности находим $P(A) = \frac{BC}{AD} = \frac{7}{10} = 0,7$.

6. Статистическое определение вероятности.

Существуют события, вероятность которых по разным причинам невозможно вычислить с помощью классического определения вероятности. Если, допустим, испытание — это бросание кости, то не всегда можно быть уверенным в том, что кубик симметричный и без дефектов, а, следовательно, в том, что элементарные исходы равновозможны. В таком случае, классическую формулу для вычисления вероятности применять нельзя.

Статистическое определение вероятности дает возможность найти вероятность опытным путем.

Определение 6. Отношение числа m наступлений данного случайного события A в данной серии испытаний к общему числу n испытаний этой серии называется частотой (или относительной частотой) события A и обозначается $W(A)$. Таким образом $W(A) = \frac{m}{n}$.

Чем отличается относительная частота от вероятности? Относительная частота — результат многократных испытаний. С увеличением числа испытаний относительная частота проявляет свойство устойчивости: всегда найдется такое число, от которого относительная частота будет отличаться сколь угодно мало при неограниченном увеличении количества испытаний. Это число и называется статистической вероятностью события.

Так, например, французский естествоиспытатель Бюффон подбрасывал монету 4 040 раз, при этом относительная частота появления герба оказалась равной 0,50693. У английского статистика Пирсона по результатам 23 тыс. подбрасываний монеты относительная частота появления герба оказалась

равной 0,5005. Демографам хорошо известна цифра 0,514 (на 1 000 рождающихся детей приходится в среднем 514 мальчиков). Видно, что относительные частоты незначительно отклоняются от числа 0,5 (значения вероятности событий), причем тем меньше, чем больше число опытов.

Определение 7. Статистической вероятностью события A называется относительная частота этого события, вычисленная по результатам большого числа испытаний. Ее обозначают $P^*(A)$, то есть $P^*(A) \approx W(A) = \frac{m}{n}$.

Статистическая вероятность приблизительно равна классической $P^*(A) \approx P(A)$.

В приведенном примере вероятность выпадения герба определялась приблизительно по результатам опыта — это апостериорная (после опыта) вероятность. Но определить вероятность выпадения герба можно и теоретически, без подбрасывания монеты, — это априорная (до опыта) вероятность.

Пример 17. Представим, что вы подбросили кубик 20 раз и получили следующие результаты:

Число на кубике	1	2	3	4	5	6
Количество выпадений	3	3	2	5	3	4

Чтобы посчитать частоту каждого из 6 исходов этого опыта, достаточно поделить количество его выпадений на 20:

Число на кубике	1	2	3	4	5	6
Количество выпадений	3	3	2	5	3	4
Частота	0,15	0,15	0,10	0,25	0,15	0,2

Если продолжить эту серию опытов с кубиком, то все частоты будут меняться. Предсказать их значения после 100 или 200 опытов заранее невозможно — в этом и состоит явление *случайной изменчивости*. Однако и в такой изменчивости есть свои закономерности.

Заметим прежде всего, что поскольку случайное событие не может произойти в N опытах более N раз, то частота любого случайного события

хотя и колеблется, но всегда лежит в промежутке от 0 до 1. При этом частота невозможного события равна 0, а частота достоверного события равна 1.

Очевидно также, что сумма частот всех исходов в любой серии опытов будет равна 1. В самом деле, ведь каждый опыт завершается ровно одним из этих исходов, поэтому сумма их абсолютных частот равна числу проведённых опытов N , а значит, сумма их относительных частот равна 1.

Поскольку любое случайное событие A наступает только в тех случаях, когда опыт завершается одним из благоприятных для него исходов, то сумма частот всех благоприятных для события A исходов будет равна частоте этого события.

Получаем следующие четыре свойства частот:

1. Частота любого случайного события всегда лежит в промежутке от 0 до 1.
2. Частота невозможного события равна 0, а частота достоверного равна 1.
3. Сумма частот всех возможных исходов опыта равна 1.
4. Частота события A равна сумме частот всех благоприятных для него исходов.

В поведении частот есть ещё одна замечательная закономерность. Она называется **устойчивостью частот** и состоит в том, что в длинной серии случайных опытов частота любого случайного события A стабилизируется и приближается к некоторому числу $P(A)$, которое называют **вероятностью** случайного события и рассматривают как числовую меру его правдоподобия.

Чтобы сделать это определение вероятности математическим, нужно установить два факта:

- во-первых, что стабилизация частоты события A будет происходить **в любой** достаточно длинной серии опытов;
- во-вторых, что число $P(A)$ для события A в любой такой серии будет **одним и тем же**.

В основе этих утверждений лежит так называемый **закон больших чисел**. Пока можно рассматривать его как «закон природы», многократно подтверждённый опытом.

Приведённые выше четыре свойства частот выполняются после любого числа проведённых опытов.

Пример 18. Среди 300 деталей, изготовленных на станке, 12 оказались не соответствующими стандарту качества. Найти частоту появления нестандартных деталей.

Решение. По формуле $w(A) = \frac{m}{n}$ находим $w(A) = \frac{12}{300} = 0,04$.

7. Операции над событиями.

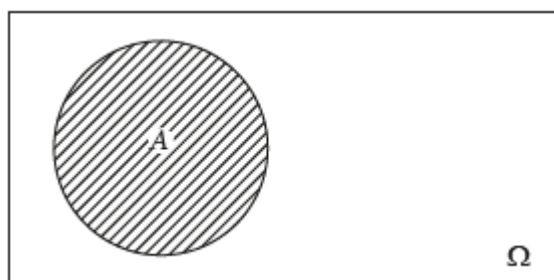
Поскольку случайные события можно рассматривать как множества исходов, то над ними можно совершать те же операции, что и над любыми множествами: сумма (объединение), произведение (пересечение), противоположное событие (дополнение).

Определение 8. Пусть события $A, B \subset \Omega$ (Ω — пространство элементарных событий). *Суммой* двух событий A и B называется событие $A + B$, состоящее в том, что в результате испытания произойдет хотя бы одно из этих событий.

Таким образом, если события A и B совместны, то их сумма $A + B$ означает, что наступило или событие A , или событие B , или оба события вместе. Если события несовместны, то событие $A + B$ заключается в том, что наступит или событие A , или событие B , так как совместное наступление событий невозможно.

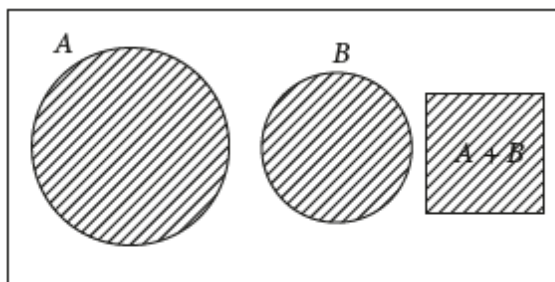
Например, событие «выпадение осадков» является суммой двух событий «выпадение снега» и «выпадение дождя», так как оно означает, что либо идет снег, либо идет дождь, либо идет снег с дождем. Отметим, что события «выпадение дождя» и «выпадение снега» являются совместными.

Для наглядного представления событий, операций над событиями и отношений между ними используются диаграммы Эйлера —

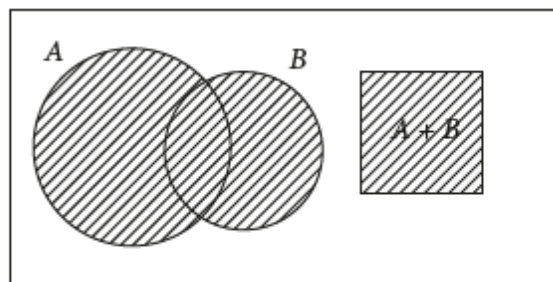


Венна. На этих диаграммах достоверное событие Ω изображается в виде некоторой области на плоскости, а случайному событию A будет соответствовать некоторая геометрическая фигура внутри области Ω .

Событию $A+B$ соответствует множество, элементы которого принадлежат хотя бы одному из множеств A или B , т. е. объединение множеств A и B .



Сумма несовместных событий A и B

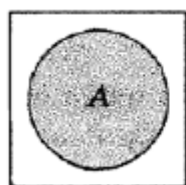


Сумма совместных событий A и B

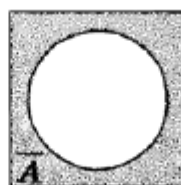
Для нескольких событий сумма определяется аналогичным образом. Например, событие $A + B + C$ заключается в наступлении одного из событий A , B , C , или в одновременном наступлении A и B , B и C , C и A , или в совместном наступлении всех трех событий.

Определение 9. События A и B называются *противоположными*, если они образуют полную группу несовместных событий. Противоположные события обозначаются A и $\bar{A}$.

Противоположное событие можно строить как дополнение $\bar{A}$ ко множеству A .



Событие A



Событие $\bar{A}$,
противоположное
событию A

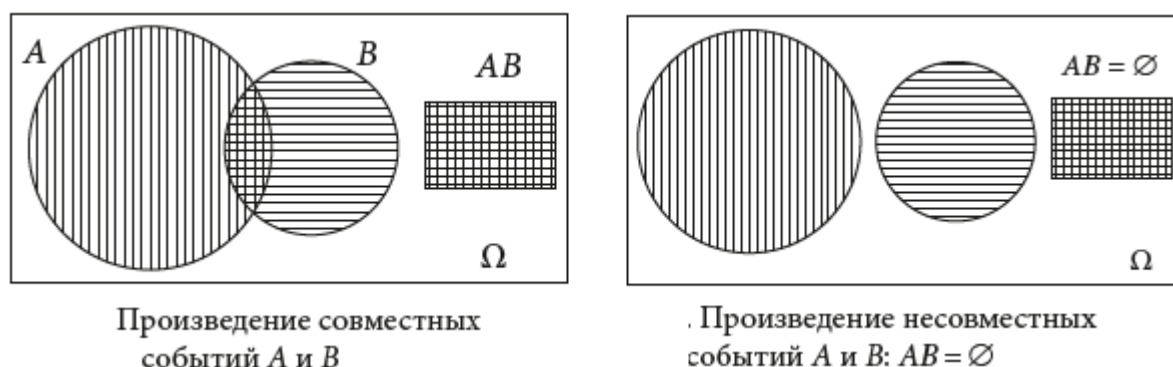
Для суммы событий выполняются соотношения:

- | | |
|--------------------------------|---------------------------|
| 1) $A + B = B + A$ | 4) $A + \Omega = \Omega$ |
| 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ | 5) $A + \emptyset = A$ |
| 3) $A + A = A$ | 6) $A + \bar{A} = \Omega$ |

Определение 10. Произведением событий A и B называется событие AB , состоящее в одновременном наступлении событий A и B .

Событию AB соответствует множество с элементами, принадлежащими одновременно множествам A и B , т. е. пересечению множеств A и B .

Если события A и B несовместны, то их произведение является невозможным событием.



Событие «выпадение снега в течение двух выходных дней» является произведением событий A : «выпадение снега в субботу» и B : «выпадение снега в воскресенье». Отметим, что в этом случае наступление события A не зависит от наступления или ненаступления события B , и наоборот.

Определение 11. События A и B называются **независимыми**, если вероятность появления одного из них не зависит от появления или не появления другого. Событие B называется **зависимым** от события A , если вероятность события B зависит от того, произошло событие A или не произошло.

Определение 12. Вероятность события B , вычисленную при условии, что событие A уже произошло, называют **условной вероятностью события B** (при условии осуществления события A), и обозначают $P_A(B)$ или $P(A|B)$.

По определению полагают, что $P_A(B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}$.

Если A и B – независимые события, то $P_A(B) = P(B)$ и $P_B(A) = P(A)$.

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий в результате испытания.

Для произведения событий справедливы соотношения:

- | | |
|--------------------|--------------------------------|
| 1) $AB = BA$ | 4) $A\Omega = A$ |
| 2) $(AB)C = A(BC)$ | 5) $A\emptyset = \emptyset$ |
| 3) $AA = A$ | 6) $\overline{AA} = \emptyset$ |

8. Вероятность суммы и произведения событий.

Теорема 1 (теорема сложения вероятностей). Пусть A и B – произвольные события. Тогда вероятность $P(A+B)$ появления хотя бы одного из них равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Доказательство. Пусть A и B – произвольные события. Обозначим через n число всех элементарных исходов испытания, в результате которого может наступить событие $A+B$. В силу определения 8, число m всех исходов, которые благоприятствуют событию $A+B$, можно подсчитать следующим образом: к числу m_1 благоприятствующих событию A исходов испытания прибавим число m_2 благоприятствующих исходов событию B . Поскольку наступление события $A+B$ происходит и при совместном наступлении событий A и B (т.е. при наступлении события AB), а каждый благоприятствующий событию AB исход благоприятствует как событию A , так и событию B , то в сумме m_1+m_2 нами дважды учтено число m_3 всех благоприятствующих событию AB исходов. Поэтому $m=m_1+m_2-m_3$, и значит, $P(A+B) = \frac{m}{n} = \frac{m_1 + m_2 - m_3}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} - \frac{m_3}{n}$.

Так как $\frac{m_1}{n}$ – вероятность события A , $\frac{m_2}{n}$ и $\frac{m_3}{n}$ – вероятности событий B и AB соответственно, то $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. Теорема доказана.

Следствие 1.1. Если события A и B несовместны, то вероятность $P(A+B)$ появления одного из них, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Доказательство. Так как события A и B несовместны, то число m_3 всех благоприятствующих исходов для события AB будет равно нулю. Из доказательства теоремы 1 следует, что $P(A+B) = \frac{m_1 + m_2 - 0}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B)$. Следствие доказано.

Следствие 1.2. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ – попарно несовместные события.

Тогда $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$.

Следствие 1.3. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ – полная группа попарно несовместных событий. Тогда $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$.

Доказательство. Последствию 1.2, $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$. Так как $A_1, A_2, \dots, A_n$ – полная группа событий, то $A_1 + A_2 + \dots + A_n = U$ – событие достоверное, и значит, $P(U) = 1$. Следствие доказано.

Следствие 1.4. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Доказательство вытекает из следствия 1.3 при $n=2$.

Теорема 2 (теорема умножения вероятностей). Вероятность $P(AB)$ совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило: $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$.

Доказательство. Согласно определению 12, $P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$. Отсюда следует, что $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$. Второе равенство доказывается аналогично. Теорема доказана.

Следствие 2.1. Если A и B – независимые события, то $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Доказательство. Так как события A и B независимы, то $P_A(B)=P(B)$ и $P_B(A)=P(A)$. Тогда, по теореме 2, $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)=P(A) \cdot P(B)$. Следствие доказано.

Пример 19. Вероятность того, что в субботу будет дождь, равна 0,6; снег – 0,2. Какова вероятность того, что в субботу выпадут осадки, если считать, что выпадение дождя не зависит от выпадения снега?

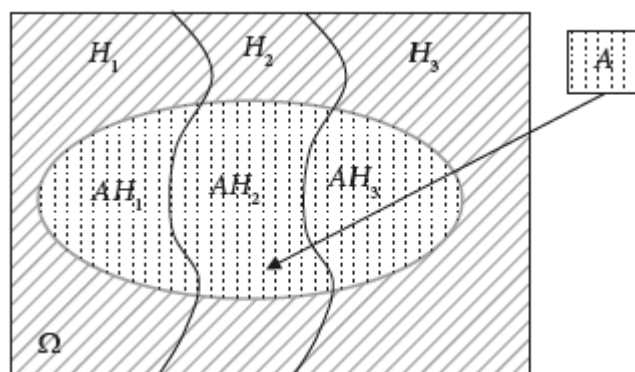
Решение. Пусть событие C заключается в выпадении осадков в субботу, т.е. либо в выпадении дождя, либо в выпадении снега, либо в выпадении дождя со снегом. Тогда, по определению 5, $C=A+B$, где A – событие “выпадение в субботу дождя”, B – “выпадение в субботу снега”. Таким образом, $P(C)=P(A+B)$. Поскольку A и B – совместные события, то, ввиду теоремы 1, $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$. Так как A и B – независимые события, то, по следствию 2.1, $P(AB)=P(A) \cdot P(B)$. Тогда $P(C)=P(A+B)=0,6+0,2-0,6 \cdot 0,2=0,68$.

Замечание 2. Анализ и решение задач на сложение и умножение вероятностей событий можно осуществлять по следующей схеме:

- 1) выяснить, в чем состоит рассматриваемое испытание;
- 2) сформулировать событие, вероятность наступления которого необходимо найти;
- 3) обозначить буквами события, рассматриваемые в условии задачи;
- 4) с помощью введенных обозначений выразить интересующее нас событие;
- 5) если требуется найти вероятность суммы событий, то выяснить, совместны или несовместны слагаемые; если вероятность произведения – зависимы или независимы множители;
- 6) для вычисления искомой вероятности воспользоваться одной из формул сложения и умножения вероятностей.

9. Формула полной вероятности.

Рассмотрим события $A, H_1, H_2, \dots, H_n$, связанные с некоторым опытом. Пусть $H_1, H_2, \dots, H_n$ образуют полную группу событий. Известно, что событие A может произойти только с одним из событий $H_1, H_2, \dots, H_n$ полной группы.



Иначе, событие A произойдет, если произойдет событие H_1 и при этом появится событие A , или произойдет событие H_2 и при этом появится событие A и т. д.

Теорема 3. Пусть $H_1, H_2, \dots, H_n$ – полная группа попарно несовместных событий. Вероятность события A , которое может наступить лишь при условии наступления одного из событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A :

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A).$$

Доказательство. По условию теоремы, событие A наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, и значит, тогда и только тогда, когда наступает одно из событий $AH_1, AH_2, \dots, AH_n$. Поэтому $P(A) = P(AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n)$. Так как события $H_1, H_2, \dots, H_n$ попарно несовместны, то события $AH_1, AH_2, \dots, AH_n$ также попарно несовместны и, по теореме о вероятности суммы событий,

$$P(AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n) = P(AH_1) + P(AH_2) + \dots + P(AH_n).$$

Поскольку из условия теоремы следует, что события A и H_i зависимы, то, согласно теореме о вероятности произведения событий,

$$P(AH_i) = P(H_i) \cdot P_{H_i}(A), \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(AH_1) + P(AH_2) + \dots + P(AH_n) = \\ &= P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) P_{H_n}(A). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Замечание 3. Доказанная формула носит название *формулы полной вероятности*. События $H_1, H_2, \dots, H_n$, удовлетворяющие условию теоремы, называют *гипотезами*. Отметим, что если при решении задачи гипотезы введены правильно, и их вероятности найдены верно, то справедливо равенство $P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1$.

Пример 20. В торговую фирму поступили телевизоры от трех поставщиков в отношении 1 : 4 : 5. Известно, что телевизоры, поставленные от первого поставщика, не требуют ремонта в течение гарантийного срока в 98 % случаев, от второго поставщика — в 88 % случаев, от третьего поставщика — в 92 % случаев. Найти вероятность того, что поступивший в фирму телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока.

Решение. Пусть событие $A = \{\text{поступивший в фирму телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока}\}$. Здесь возможны три гипотезы:

$H_1 = \{\text{телевизор поступил от первого поставщика}\}$ и $P(H_1) = 1/10 = 0,1$;

$H_2 = \{\text{телевизор поступил от второго поставщика}\}$ и $P(H_2) = 4/10 = 0,4$;

$H_3 = \{\text{телевизор поступил от третьего поставщика}\}$ и $P(H_3) = 5/10 = 0,5$.

События H_1, H_2, H_3 образуют полную группу попарно несовместных событий, так как они не могут произойти одновременно и сумма их вероятностей равна единице: $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$. Событие A происходит одновременно с одним и только с одним из событий H_1, H_2, H_3 .

Условные вероятности события A при этих гипотезах соответственно равны $P(H_1) = 0,98$, $P(H_2) = 0,88$, $P(H_3) = 0,92$. По формуле полной вероятности получаем

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) P_{H_3}(A) = 0,1 \cdot 0,98 + 0,4 \cdot 0,88 + 0,5 \cdot 0,92 = \\ &= 0,91. \end{aligned}$$

Пример 21. Имеются две урны с шарами: в первой урне 6 черных и 4 белых шара, во второй — 7 черных и 3 белых шара. Наудачу из первой урны извлекается шар и перекладывается во вторую. После этого из второй урны наудачу извлекают два шара. Найти вероятность того, что оба этих шара черные.

Решение. Пусть событие $A = \{\text{из второй урны извлекли два черных шара после того, как один шар переложили из первой урны во вторую}\}$. Здесь возможны две гипотезы:

$H_1 = \{\text{из первой урны во вторую переложили черный шар}\},$

$$P(H_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \quad P_{H_1}(A) = \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} = \frac{28}{55} \quad (\text{поскольку после перекладывания}$$

черного шара во второй урне стало 8 черных и 3 белых шара);

$H_2 = \{\text{из первой урны во вторую переложили белый шар}\},$

$$P(H_2) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \quad P_{H_2}(A) = \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{21}{55} \quad (\text{поскольку после перекладывания}$$

белого шара во второй урне стало 7 черных и 4 белых шара).

Тогда по формуле полной вероятности имеем:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{28}{55} + \frac{2}{5} \cdot \frac{21}{55} = \frac{126}{275}.$$

10. Формула Байеса.

В тесной связи с формулой полной вероятности находится так называемая *формула Байеса*. Она используется в той же ситуации, что и формула полной вероятности – событие A может наступить только вместе с одним из n попарно несовместных событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, образующих полную группу. Формула Байеса решает следующую задачу: пусть произведено испытание и в результате него событие A наступило. Однако, сам по себе этот факт еще не позволяет сказать, какая из гипотез $H_1, H_2, \dots, H_n$ имела место в данном испытании. Формула Байеса дает ответ на вопрос: какова вероятность того, что гипотеза H_i повлекла наступление события A ,

$i=\overline{1,n}$. Согласно формуле произведения вероятностей, $P(AH_i) = P(A) \cdot P_A(H_i)$.

Отсюда получаем, что $P_A(H_i) = \frac{P(AH_i)}{P(A)}$, где $P(A)$ вычисляют с помощью формулы полной вероятности, а числитель дроби находят из равенства $P(AH_i) = P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)$. Таким образом, **формула Байеса** имеет вид:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}, i=\overline{1,n}.$$

Пример 22. Имеется два набора шаров различных цветов. Вероятность извлечения красного шара из первого набора равна 0,3, а из второго – 0,6. **а)** Найти вероятность того, что извлеченный наудачу шар – красный; **б)** Найти вероятность того, что красный шар извлечен из первого набора.

Решение. **а)** Испытание, рассматриваемое в примере, заключается в извлечении одного шара из имеющихся наборов. Пусть B_1 – событие “появление шара из первого набора”, B_2 – “появление шара из второго набора”. Так как извлекается всего один шар и только из двух данных наборов, то B_1 и B_2 образуют полную группу несовместных событий. Поскольку эти события равновозможны, то $P(B_1) = P(B_2) = 0,5$. Обозначим через A интересующее нас событие – “появление красного шара”. Оно может наступить лишь вместе с одним из событий B_1 или B_2 . Если событие A происходит в результате наступления события B_1 , то его вероятность, согласно условию, равна $P_{B_1}(A) = 0,3$. Аналогично, $P_{B_2}(A) = 0,6$. Тогда, по формуле полной вероятности, $P(A) = 0,5 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,6 = 0,15 + 0,3 = 0,45$.

б) Допустим, что событие A уже произошло – извлечен красный шар. Найдём вероятность $P_A(B_1)$ того, что этот шар извлечен из первого набора.

Согласно формуле Байеса,
$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,5 \cdot 0,3}{0,45} = \frac{0,15}{0,45} = \frac{1}{3}.$$

Замечание 4. При вычислении вероятности рассматриваемого события с помощью формулы полной вероятности необходимо:

1) обозначить (через A , например) событие, вероятность наступления которого необходимо найти;

2) сформулировать все возможные гипотезы $B_1, \dots, B_n$ – события, каждое из которых может повлечь наступление события A ; проверить, что гипотезы $B_1, \dots, B_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий;

3) вычислить вероятности каждой из гипотез и условную вероятность наступления события A при условии, что произошло событие B_i , $i = \overline{1, n}$;

4) для вычисления $P(A)$ воспользоваться формулой полной вероятности.

Если из условия задачи известно, что событие A уже наступило, то с помощью формулы Байеса вычисляют условную вероятность $P_A(B_i)$ любой из гипотез, $i = \overline{1, n}$.

11. Схема Бернулли.

С понятием «независимых событий» тесно связано понятие «независимых испытаний (опытов)». Если проводится несколько испытаний, т. е. опыт выполняется при данном комплексе условий многократно (проводится «последовательность испытаний»), причем вероятность наступления некоторого события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются *независимыми*.

Примерами независимых испытаний могут служить: несколько подбрасываний монеты; несколько извлечений из урны занумерованных шаров, если шары каждый раз (после просмотра) возвращаются опять в урну; выстрелы по мишени и т. д.

В приложениях теории вероятностей часто встречается некоторая стандартная схема, называемая схемой независимых испытаний или *схемой Бернулли*. Рассмотрим эту схему и связанные с ней задачи.

Пусть A – случайное событие по отношению к некоторому испытанию. Будем считать, что это испытание имеет два исхода: наступление события A и ненаступление события A (т.е. наступление события $\bar{A}$). Если производится несколько таких испытаний, причем вероятность события A в каждом из них не зависит от исходов остальных, то такие испытания называют *независимыми* (относительно события A).

Определение 13. Говорят, что проводимый эксперимент *удовлетворяет схеме Бернулли*, если:

- 1) эксперимент состоит из n независимых испытаний;
- 2) каждое испытание имеет два исхода – наступление некоторого события A и наступление события $\bar{A}$;
- 3) вероятность события A в каждом испытании постоянна.

Следующая теорема дает ответ на вопрос, как найти вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит ровно k раз.

Теорема 4. Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p , а не появления – q . Тогда вероятность $P_n(k)$ того, что в n испытаниях событие A появится ровно k раз, вычисляется по *формуле Бернулли*:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Доказательство. Введем понятие сложного события. Под сложным будем понимать такое событие, в котором событие A встречается k раз, а событие $\bar{A}$ – $(n-k)$ раз. По теореме произведения вероятностей, вероятность этого сложного события будет равна $\underbrace{P(A) \cdot \dots \cdot P(A)}_{k \text{ раз}} \underbrace{P(\bar{A}) \cdot \dots \cdot P(\bar{A})}_{(n-k) \text{ раз}} = p^k \cdot q^{n-k}$.

Подсчитаем, сколько таких сложных событий можно получить. Поскольку одно сложное событие отличается от другого лишь местом, которое занимают события A в n испытаниях, то различных сложных событий будет

столько, сколько можно составить сочетаний из n по k . Таким образом, всего сложных событий - C_n^k , причем, как отмечено выше, вероятность каждого из них равна $p^k \cdot q^{n-k}$. Интересующее нас событие заключается в наступлении хотя бы одного из C_n^k сложных событий. Поэтому, ввиду теоремы сложения вероятностей, имеем:

$$P_n(k) = \underbrace{p^k \cdot q^{n-k} + \dots + p^k \cdot q^{n-k}}_{C_n^k \text{ раз}} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}. \text{ Теорема доказана.}$$

Определение 14. Число $k=k_0$, при котором вероятность $P_n(k)$ является наибольшей, называется **наивероятнейшим числом наступления события A в n испытаниях**.

Пусть $P(A)=p$, $P(\bar{A})=q$. Если $p \neq 0$ и $p \neq 1$, то наивероятнейшее число k_0 можно определить из двойного неравенства:

$$np - q \leq k_0 \leq np + p.$$

Если $np+p$ не является целым числом, то неравенство данное определяет лишь одно наивероятнейшее число. Если $np+p$ – целое число, то имеются два наивероятнейших значения: $k_0 = np - q$ и $k'_0 = np + p$.

Пример 23. Вероятность попадания в мишень при выстреле равна 0,7.
а) Определить вероятность того, что при шести выстрелах произойдет пять попаданий в мишень; **б)** Найти наивероятнейшее число k_0 попаданий в мишень при шести выстрелах.

Решение. **а)** Проверим, удовлетворяет ли рассматриваемый в задаче эксперимент схеме Бернулли. Проводятся независимые испытания – выстрелы по мишени, число испытаний $n=6$. Обозначим через A событие «попадание в мишень при выстреле». Тогда событие $\bar{A}$ означает «промах». Каждое испытание имеет два исхода: наступление события A и наступление события $\bar{A}$. Вероятность наступления события A в каждом испытании постоянна и равна $p=0,7$. Отсюда следует, что $P(\bar{A})=q=1-p=1-0,7=0,3$. Для нахождения вероятности пяти попаданий при шести выстрелах воспользуемся формулой (8): $P_6(5) = C_6^5 \cdot p^5 \cdot q^{6-5} = \frac{6!}{5!(6-5)!} \cdot 0,7^5 \cdot 0,3 \approx 0,15$.

б) Наивероятнейшее число попаданий в мишень при шести выстрелах найдем, согласно (9), из двойного неравенства: $6 \cdot 0,7 - 0,3 \leq k_0 \leq 6 \cdot 0,7 + 0,7$, т.е. $3,9 \leq k_0 \leq 4,9$. Отсюда следует, что $k_0 = 4$.

В приложениях иногда возникает потребность в вычислении вероятностей $P_n(k)$ для весьма больших n и k , что сложно сделать с помощью формулы Бернулли. В этом случае используют приближенные формулы Лапласа. Однако, эти формулы также обладают недостатком – их точность понижается по мере приближения одного из чисел p или q к нулю. В этом случае обычно используют для вычисления $P_n(k)$ приближенную формулу Пуассона.

Предельные теоремы для схемы Бернулли.

В приложениях иногда возникает потребность в вычислении вероятностей $P_n(k)$ для весьма больших n и k , что сложно сделать с помощью формулы Бернулли. В этом случае используют приближенные формулы Муавра-Лапласа. Однако, эти формулы также обладают недостатком – их точность понижается по мере приближения одного из чисел p или q к нулю. В этом случае обычно используют для вычисления $P_n(k)$ приближенную формулу Пуассона.

Теорема 5 (Пуассона). Предположим, что произведение np является постоянной величиной, когда n неограниченно возрастает. Обозначим $\lambda = np$. Тогда для любого фиксированного m и любого постоянного λ :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ np = \lambda}} P_{m,n} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

В случае, когда n велико, а p мало (обычно $p < 0,1$; $npq \leq 9$) вместо формулы Бернулли применяют приближенную формулу Пуассона

$$P_{m,n} \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \text{ где } \lambda = np.$$

Пример 24. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет на пяти веретенах.

Решение. Для определения вероятности $P_{5;1000}$ применим приближенную формулу Пуассона

$$\lambda = np = 0,004 \cdot 1000 = 4 ; P_{5;1000} \approx \frac{4^5 \cdot e^{-4}}{5!} \approx 0,1563.$$

Значение функции Пуассона найдено по приложению 3 для $m = 5$ и $\lambda = 4$.

Теорема 6 (Муавра-Лапласа (локальная)). Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаний равна p и отлична от нуля и единицы, а число испытаний достаточно велико, то вероятность $P_{m,n}$ того, что в n испытаниях событие A наступит m раз, приближенно равна (чем больше n , тем точнее) значению функции

$$P_{m;n} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} f(u),$$

где $f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$, $u = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$. Таблица значений функции $f(x)$ приведена в приложении 1.

Пример 25. Вероятность найти белый гриб среди прочих равна $\frac{1}{4}$. Какова вероятность того, что среди 300 грибов белых будет 75?

Решение. По условию задачи $p = \frac{1}{4}$, $m = 75$, $n = 300$, $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Находим $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 300 \cdot \frac{1}{4}}{\sqrt{300 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}} = 0$. По таблице находим $\varphi(x) = 0,3989$.

$$P_{75;300} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = \frac{0,3989}{\sqrt{\frac{900}{16}}} = \frac{4 \cdot 0,3989}{30} \approx 0,053.$$

Теорема 7 (Муавра-Лапласа (интегральная)). Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаний равна p и отлична от нуля и единицы, а число испытаний достаточно велико, то вероятность того, что в n испытаниях число успехов m находится между m_1 и m_2 , приближенно равна (чем больше n , тем точнее)

$$P(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \frac{1}{2} \left(\Phi \left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} \right) - \Phi \left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \right) \right),$$

где p — вероятность появления успеха в каждом испытании, $q = 1 - p$,

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, значения $\Phi(x)$ приведены в приложении 2.

Пример 27. В партии из 768 арбузов каждый арбуз оказывается неспелым с вероятностью $\frac{1}{4}$. Найти вероятность того, что количество спелых арбузов будет в пределах от 564 до 600.

Решение. По условию $n = 768$, $p = 0,75$, $m_1 = 564$, $m_2 = 600$. По интегральной теореме Лапласа

$$\begin{aligned} P(564 \leq m \leq 600) &\approx \frac{1}{2} \left(\Phi \left(\frac{600 - 768 \cdot 0,75}{\sqrt{768 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} \right) - \Phi \left(\frac{564 - 768 \cdot 0,75}{\sqrt{768 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\Phi \left(\frac{600 - 576}{12} \right) - \Phi \left(\frac{564 - 576}{12} \right) \right) = \frac{1}{2} (\Phi(2) + \Phi(1)) \approx \frac{1}{2} (0,9545 + 0,6827) = 0,8186. \end{aligned}$$

Пример 28. Город ежедневно посещает 1000 туристов, которые днем идут обедать. Каждый из них выбирает для обеда один из двух городских ресторанов с равными вероятностями и независимо друг от друга. Владелец одного из ресторанов желает, чтобы с вероятностью приблизительно 0,99 все пришедшие в его ресторан туристы могли там одновременно пообедать. Сколько мест должно быть для этого в его ресторане?

Решение. Пусть A = «турист пообедал у заинтересованного владельца». Наступление события A будем считать «успехом», $p = P(A) = 0,5$, $n = 1000$.

Нас интересует такое наименьшее число k , что вероятность наступления не менее чем k «успехов» в последовательности из $n = 1000$ независимых испытаний с вероятностью успеха $p = 0,5$ приблизительно равна $1 - 0,99 = 0,01$. Это как раз вероятность переполнения ресторана. Таким образом, нас интересует такое наименьшее число k , что $P_{1000} = (k, 1000) \approx 0,01$. Применим интегральную теорему Муавра-Лапласа

$$\begin{aligned} P_{1000} (k \leq m \leq 1000) &\approx 0,01 \approx \frac{1}{2} \left(\Phi \left(\frac{1000 - 500}{\sqrt{250}} \right) - \Phi \left(\frac{k - 500}{\sqrt{250}} \right) \right) \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \left(\Phi \left(\frac{100}{\sqrt{10}} \right) - \Phi \left(\frac{k - 500}{5\sqrt{10}} \right) \right) \approx \frac{1}{2} \left(1 - \Phi \left(\frac{k - 500}{5\sqrt{10}} \right) \right). \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\Phi \left(\frac{k - 500}{5\sqrt{10}} \right) \approx 0,98.$$

Используя таблицу для $\Phi(x)$ (приложение 2), находим $\frac{k - 500}{5\sqrt{10}} \approx 2,33$,

значит $k = 2,33 \cdot 5\sqrt{10} + 500 \approx 536,8$. Следовательно, в ресторане должно быть 537 мест.

ГЛАВА 3

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

1. Случайные величины.

На практике часто встречаются задачи, рассматривающие такое испытание, каждый исход которого есть событие, связанное с определенным числом. Например: в результате подбрасывания игрального кубика происходит событие, связанное с числом x , где x – выпавшее число очков; в результате прыжка в длину происходит событие «преодоление расстояния y ». В первом примере число x может быть равно 1, 2, 3, 4, 5 и 6, а во втором примере число y может быть равно любому из значений некоторого промежутка. Кроме того, заранее определить эти числа невозможно, поскольку результат испытания зависит от многих случайных причин, которые полностью не могут быть учтены. В этом смысле числа x и y есть величины *случайные*. Чтобы все примеры такого типа уложить в единую схему, введем понятие случайной величины.

Определение 1. *Случайной величиной*, связанной с данным испытанием, называется величина, которая при каждом осуществлении этого испытания принимает то или иное числовое значение (заранее неизвестно, какое именно).

Случайные величины обозначают большими буквами латинского алфавита, а возможные значения случайных величин – малыми. Так, в первом примере «число выпавших очков» есть случайная величина X , а ее возможные значения – $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4, x_5=5, x_6=6$. Кроме того, мы можем найти, к примеру, вероятность того, что при подбрасывании игрального кубика выпадет три очка, или, скажем, подтвердить то факт, что при прыжке в длину вероятность преодолеть расстояние 2 метра больше, чем вероятность преодолеть расстояние 5 метров. Таким образом, можно

говорить о том, что случайная величина принимает каждое из своих возможных значений с определенной вероятностью.

Определение 2. Любое правило, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, называется **законом распределения случайной величины**.

Закон распределения случайной величины может быть задан *таблично* (в форме таблицы), *аналитически* (в виде формулы) и *графически*.

В зависимости от множества значений, принимаемых случайной величиной, все случайные величины можно подразделить на *дискретные* и *непрерывные*.

Определение 3. *Дискретной (прерывной)* называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения;

непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Случайная величина X из первого примера является дискретной, а во втором примере “расстояние, преодоленное в результате прыжка” – непрерывная случайная величина. Дискретные величины являются наиболее удобными для изучения. Познакомимся с ними подробнее.

Пусть дискретная случайная величина X принимает значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$ соответственно. При табличном задании закона распределения этой величины первая строка таблицы содержит возможные значения $x_1, x_2, \dots, x_n$, а вторая – их вероятности:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Поскольку в результате испытания дискретная случайная величина X принимает одно и только одно из своих возможных значений, то события $X=x_1, X=x_2, \dots, X=x_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий, и значит, сумма вероятностей этих событий равна единице:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Пример 1. Найти закон распределения дискретной случайной величины X – «число выпавших очков при подбрасывании игрального кубика».

Решение. Предварительно вычислим вероятность каждого из событий $X=x_i$ – «появление i очков», $i=\overline{1,6}$. Поскольку всего элементарных исходов испытания 6, и каждому событию $X=x_i$ благоприятствует только один из этих элементарных исходов, то $p_i = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}$, $i=\overline{1,6}$. Тогда закон распределения для X примет вид:

X	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

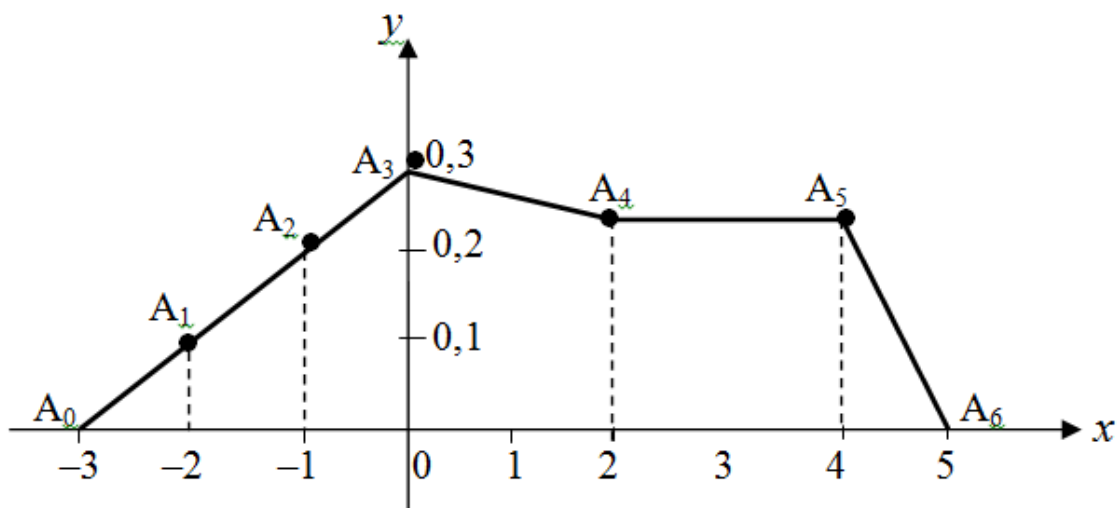
Ряд распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически в виде полигона или многоугольника распределения вероятностей. Для этого по горизонтальной оси в выбранном масштабе нужно отложить значения случайной величины, а по вертикальной — вероятности этих значений, тогда точки с координатами (x_i, p_i) будут изображать полигон распределения вероятностей; соединив же эти точки отрезками прямой, получим *многоугольник распределения вероятностей*.

Пример 2. Пусть X — дискретная случайная величина, заданная рядом распределения

X	-2	-1	0	2	4
P	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

Построить полигон и многоугольник распределения вероятностей.

Решение. На оси X откладываем значения x_i , равные $-2, -1, 0, 2, 4$, а по вертикальной оси вероятности этих значений



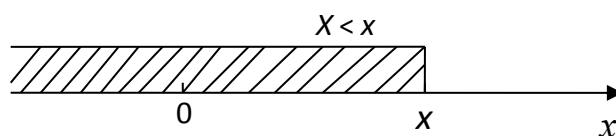
Точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 изображают полигон распределения, а ломаная $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ — многоугольник распределения вероятностей.

Дискретная случайная величина может быть задана функцией распределения. Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, выражающая для каждого x вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее x :

$$F(x) = P(X < x)$$

Функцию $F(x)$ иногда называют интегральной функцией распределения.

Если значения случайной величины — точки на числовой оси, то геометрически функция распределения интерпретируется как вероятность



того, что случайная величина X попадает левее заданной точки x

$F(x)$ обладает свойствами:

1. Функция распределения случайной величины есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей:

$$0 \leq F(x) \leq 1.$$

Утверждение следует из того, что функция распределения — это вероятность.

2. Функция распределения есть неубывающая функция на всей числовой оси.

3. На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности равна 1, т.е.

$$F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; \quad F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

4. Вероятность попадания случайной величины в интервал $[x_1, x_2)$ (включая x_1) равна приращению ее функции распределения на этом интервале, т.е.

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

2. Числовые характеристики случайной величины.

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако, в ряде случаев, когда закон распределения неизвестен, можно обойтись одним или несколькими числами, отражающими наиболее важные особенности случайной величины. Такого рода числа называют **числовыми характеристиками** случайной величины. Рассмотрим числовые характеристики дискретных случайных величин.

Определение 4. Математическим ожиданием дискретной случайной величины X с законом распределения

X	X_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

называется числом $M(X)$, равное:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n.$$

Вероятностный смысл математического ожидания состоит в следующем: *число $M(X)$ приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.*

Приведем некоторые важные свойства математического ожидания. Отметим, что на любое постоянное число C будем смотреть как на дискретную случайную величину, которая имеет единственное возможное значение $x=C$. Такие случайные величины называют *постоянными* величинами.

Лемма 1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной величине:

$$M(C) = C.$$

Доказательство. Поскольку постоянная величина имеет единственное возможное значение, то она принимает это значение с вероятностью $p=1$. Отсюда, согласно определению 13, получим $M(C) = C \cdot 1 = C$. Лемма доказана.

Две случайные величины называют *независимыми*, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения принимает другая величина. Определим *произведение XU* независимых случайных величин X и U как случайную величину, возможные значения которой равны произведениям каждого возможного значения X на каждое возможное значение U , причем вероятности возможных значений произведения XU равны произведениям вероятностей сомножителей.

Лемма 2. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XU) = M(X) \cdot M(U).$$

Доказательство. Пусть X и U – независимые дискретные случайные величины, имеющие следующие законы распределения:

X	x_1	x_2
p	p_1	p_2

U	y_1	y_2
q	q_1	q_2

Тогда, в силу отмеченного выше, закон распределения случайной величины XU примет вид:

XU	$x_1 y_1$	$x_1 y_2$	$x_2 y_1$	$x_2 y_2$
pq	$p_1 \cdot q_1$	$p_1 \cdot q_2$	$p_2 \cdot q_1$	$p_2 \cdot q_2$

Согласно определению,

$$\begin{aligned}
 M(XU) &= x_1 y_1 \cdot p_1 \cdot q_1 + x_1 y_2 \cdot p_1 \cdot q_2 + x_2 y_1 \cdot p_2 \cdot q_1 + x_2 y_2 \cdot p_2 \cdot q_2 = \\
 &= x_1 \cdot p_1 \cdot (y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2) + x_2 \cdot p_2 \cdot (y_1 \cdot q_1 + y_2 \cdot q_2) = \\
 &= (x_1 p_1 + x_2 p_2) \cdot (y_1 q_1 + y_2 q_2) = M(X) \cdot M(Y).
 \end{aligned}$$

Доказательство равенства $M(XU)=M(X) \cdot M(Y)$ в случае, когда величины X и U имеют большее число возможных значений, проводится аналогично. Лемма доказана.

Следствие 2.1. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX) = C \cdot M(X).$$

Доказательство. Пусть X – некоторая дискретная случайная величина. Постоянная величина C принимает свое единственное возможное значение C независимо от того, какое из своих возможных значений приняла величина X . Верно и обратное, закон распределения X не зависит от постоянной C . Поэтому величины X и C являются независимыми. Согласно лемме 2, $M(CX) = M(C) \cdot M(X) = C \cdot M(X)$. Лемма доказана.

Сумму $X+U$ случайных величин X и U определяют как случайную величину, возможные значения которой равны суммам каждого возможного значения X с каждым возможным значением U , причем вероятности возможных значений $X+U$ для независимых величин равны произведениям вероятностей слагаемых, а для зависимых величин – произведениям вероятности одного слагаемого на условную вероятность другого.

Сформулируем, не приводя доказательства, еще одно свойство математического ожидания.

Лемма 3. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y).$$

Математическое ожидание характеризует дискретную случайную величину неполностью. Например, две случайные величины X и Y с законами распределения

X	-0,1	0,1
p	0,5	0,5

Y	-100	100
q	0,5	0,5

имеют одно и то же математическое ожидание $M(X) = 0 = M(Y)$. Однако, значения величины X близки к его математическому ожиданию, а значения Y очень далеки от $M(Y)$. В этом случае говорят, что величины X и Y имеют различные *рассеивания* значений около их математических ожиданий. Разность $X-M(X)$ называют *отклонением* величины X от своего математического ожидания. Согласно сказанному выше, в качестве другой числовой характеристики случайной величины естественно было бы рассматривать среднее значение отклонения $X-M(X)$. Однако, оказалось, что это среднее значение всегда равно нулю. Действительно, $M(X-M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0$. Поэтому за числовую характеристику случайной величины принимают среднее значение квадрата отклонения.

Дисперсия (от латинского *dispersio* – рассеяние) является одним из показателей вариации всех значений случайной величины, которые могут появиться в результате испытаний. Дисперсия – числовая характеристика случайной величины.

Определение 5. *Дисперсией (рассеиванием)* дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения, и обозначается $D(X)$, т.е.

$$D(X) = M [X-M(X)]^2.$$

На практике для вычисления дисперсии обычно используют следующую формулу:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2,$$

где X^2 – случайная величина, возможные значения которой равны квадратам возможных значений величины X , а вероятности возможных значений X^2 совпадают с соответствующими вероятностями значений X . Другими словами дисперсия – это среднее значение квадрата отклонения случайной величины от её среднего значения.

Используя определение дисперсии и свойства математического ожидания, нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений.

Лемма 4. Пусть C – постоянная величина, а X – произвольная дискретная случайная величина. Тогда:

- а) $D(C) = 0$;
- б) $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$;
- в) $D(C + X) = D(X)$.

Лемма 5. Если X и Y – независимые случайные величины, то

$$D(X+Y) = D(X-Y) = D(X) + D(Y).$$

Дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины. Например, если величина X выражается в линейных метрах, то $D(X)$ будет выражаться в метрах квадратных. Поэтому в тех случаях, когда желательно, чтобы оценка рассеяния имела размерность случайной величины, используют еще одну числовую характеристику – *среднее квадратическое отклонение*.

Определение 6. Средним квадратическим отклонением дискретной случайной величины X называется число $\sigma(X)$, равное корню квадратному из дисперсии $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Пример 3. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X , заданной законом распределения:

X	-1	2	1
p	0,6	0,1	0,3

Решение. Используя формулу для вычисления математического ожидания, получим

$$M(X) = -1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 = -0,6 + 0,2 + 0,3 = -0,1.$$

Для нахождения дисперсии предварительно вычислим $M(X^2)$. Величина X^2 имеет следующий закон распределения:

X	1	4	1
p	0,6	0,1	0,3

Поэтому $M(X^2) = 1 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 = 0,6 + 0,4 + 0,3 = 1,3$. Тогда, согласно формулам (11) и (12),

$$D(X) = 1,3 - 0,1^2 = 1,29 \quad \text{и} \quad \sigma(X) = \sqrt{1,29} \approx 1,13.$$

Пример 4. В аккредитации участвуют 4 коммерческих вуза. Вероятности пройти аккредитацию и получить сертификат для этих вузов, соответственно равны 0,5; 0,4; 0,3; 0,2. Составить закон распределения числа коммерческих вузов, не прошедших аккредитацию. Найти числовые характеристики этого распределения.

Решение. В качестве случайной величины X выступает число коммерческих вузов, не прошедших аккредитацию. Возможные значения, которые может принять случайная величина X : 0, 1, 2, 3, 4.

Для составления закона распределения необходимо рассчитать соответствующие вероятности. Обозначим через событие A_1 — первый вуз прошел аккредитацию, A_2 — второй, A_3 — третий, A_4 — четвертый. Тогда $P(A_1) = 0,5$; $P(A_2) = 0,4$; $P(A_3) = 0,3$; $P(A_4) = 0,2$. Вероятности для вузов не пройти аккредитацию соответственно равны $P(\overline{A_1}) = 1 - 0,5 = 0,5$; $P(\overline{A_2}) = 1 - 0,4 = 0,6$; $P(\overline{A_3}) = 1 - 0,3 = 0,7$; $P(\overline{A_4}) = 1 - 0,2 = 0,8$.

Тогда имеем:

$$P(X = 0) = P(A_1 A_2 A_3 A_4) = 0,012 .$$

$$P(X = 1) = P(\overline{A_1} A_2 A_3 A_4) + P(A_1 \overline{A_2} A_3 A_4) + P(A_1 A_2 \overline{A_3} A_4) + P(A_1 A_2 A_3 \overline{A_4}) = 0,106 .$$

$$P(X = 2) = P(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3 A_4) + P(\overline{A_1} A_2 \overline{A_3} A_4) + P(\overline{A_1} A_2 A_3 \overline{A_4}) + P(A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} A_4) + \\ + P(A_1 \overline{A_2} A_3 \overline{A_4}) + P(A_1 A_2 \overline{A_3} A_4) = 0,320 .$$

$$P(X = 3) = P(A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} \overline{A_4}) + P(\overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \overline{A_4}) + P(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3 \overline{A_4}) + P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3} A_4) = 0,394 .$$

$$P(X = 4) = P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3} \overline{A_4}) = 0,168 .$$

Запишем закон распределения в виде таблицы

X	0	1	2	3	4
P	0,012	0,106	0,320	0,394	0,168

Проверка: $0,012 + 0,106 + 0,32 + 0,394 + 0,168 = 1$.

Вычислим

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = 0 \cdot 0,012 + 1 \cdot 0,106 + 2 \cdot 0,320 + 3 \cdot 0,394 + 4 \cdot 0,168 = 2,6 .$$

Вычислим $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$:

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i = 0 \cdot 0,012 + 1 \cdot 0,106 + 4 \cdot 0,32 + 9 \cdot 0,394 + 16 \cdot 0,168 = 7,62 ,$$

$$(M(X))^2 = 2,6^2 = 6,76 . D(X) = 7,62 - 6,76 = 0,86 .$$

3. Законы распределения дискретной случайной величины.

Рассмотрим некоторые виды распределения дискретной случайной величины.

Биномиальный закон распределения

Пусть производится эксперимент, удовлетворяющий схеме Бернулли: проводится n независимых испытаний, в результате каждого из которых событие A или наступает, или не наступает. Вероятность наступления события A во всех испытаниях постоянна и равна p . Рассмотрим в качестве дискретной случайной величины X число появлений события A в этих

испытаниях. Тогда X может принимать значения $0, 1, 2, \dots, n$. Вероятность того, что событие A в n испытаниях появится ровно k раз, можно вычислить по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Тогда закон распределения дискретной случайной величины X примет вид:

X	0	1	$\dots$	n
p	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$\dots$	$P_n(n)$

Закон распределения, характеризующийся данной таблицей, называется **биномиальным законом распределения** дискретной случайной величины X или биномиальным распределением.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X , распределенной по биномиальному закону, вычисляется по формулам:

$$M(X) = np,$$

$$D(X) = npq.$$

Пример 5. Известно, что в определенном городе 20 % горожан добираются на работу личным автотранспортом. Случайно выбраны 4 человека. Составить закон распределения числа людей, добирающихся на работу личным автотранспортом. Найти числовые характеристики этого распределения.

Решение. В качестве случайной величины X выступает число людей в выборке, которые добираются на работу личным автотранспортом. Возможные значения, которые может принять случайная величина X : 0, 1, 2, 3, 4.

Вероятность того, что каждый из отобранных людей, которые добираются на работу личным автотранспортом, постоянна и равна $p = 0,2$. Вероятность противоположного события, т.е. того, что каждый из отобранных людей добирается на работу не личным автотранспортом, равна $q = 1 - p = 1 - 0,2 = 0,8$. Все 4 испытания независимы. Случайная величина $X = m$ подчиняется биномиальному закону распределения вероятностей с

параметрами $n = 4$; $p = 0,2$; $q = 0,8$. Для составления закона распределения вычислим вероятности того, что случайная величина примет каждое из своих возможных значений.

Расчет искомых вероятностей осуществляется по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

$$P(X = 0) = P_4(0) = C_4^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^{4-0} = 1 \cdot 1 \cdot 0,8^4 = 0,4096,$$

$$P(X = 1) = P_4(1) = C_4^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^{4-1} = 4 \cdot 0,2 \cdot 0,8^3 = 0,4096,$$

$$P(X = 2) = P_4(2) = C_4^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^{4-2} = 6 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^2 = 0,1536,$$

$$P(X = 3) = P_4(3) = C_4^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^{4-3} = 4 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8 = 0,0256,$$

$$P(X = 4) = P_4(4) = C_4^4 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^{4-4} = 1 \cdot 0,2^4 \cdot 1 = 0,0016.$$

Запишем закон распределения в виде таблицы

X	0	1	2	3	4
P	0,4096	0,4096	0,1536	0,0256	0,0016

Так как все возможные значения случайной величины образуют полную группу событий, то сумма их вероятностей должна быть равна 1.

Проверка: $0,4096 + 0,4096 + 0,1536 + 0,0256 + 0,0016 = 1$.

Найдем числовые характеристики дискретной случайной величины: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Математическое ожидание может быть рассчитано по формуле

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = 0 \cdot 0,4096 + 1 \cdot 0,4096 + 2 \cdot 0,1536 + 3 \cdot 0,0256 + 4 \cdot 0,0016 = 0,8.$$

Так как случайная величина подчиняется биномиальному закону, то для расчета математического ожидания можно воспользоваться формулой

$$M(X) = np = 4 \cdot 0,2 = 0,8.$$

Дисперсия случайной величины может быть рассчитана по формуле

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2:$$

$$(M(X))^2 = 0,8^2 = 0,64 ,$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i = 0 \cdot 0,4096 + 1 \cdot 0,4096 + 4 \cdot 0,1536 + 9 \cdot 0,0256 + 16 \cdot 0,0016 = 1,28 ,$$

$$D(X) = 1,28 - 0,64 = 0,64 .$$

В данном случае дисперсию можно рассчитать по формуле

$$D(X) = npq = 4 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,64 .$$

Рассчитаем среднее квадратическое отклонение случайной величины по формуле $\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,64} = 0,8 .$

Распределение Пуассона

Если число испытаний велико, а вероятность появления события p в каждом испытании очень мала, то вместо формулы Бернулли пользуются приближенной формулой Пуассона

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} ,$$

где m – число появлений события в n независимых испытаниях; m принимает значения $0, 1, 2, \dots, n$. $\lambda = np$ (среднее число появлений события в n испытаниях).

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, совпадают и равны параметру λ , который определяет этот закон, т.е.

$$M(X) = D(X) = \lambda .$$

Геометрическое распределение

С испытаниями Бернулли связано ещё одно распределение вероятностей, которое называется геометрическим.

Рассмотрим серию испытаний Бернулли до первого успеха. Пусть X — это число опытов, которое потребовалось при этом провести. Тогда X — дискретная случайная величина с бесконечным множеством возможных значений. В самом деле, возможными значениями этой величины будут все натуральные числа от 1 до бесконечности, поскольку мы не можем установить верхнюю границу для числа испытаний, при достижении которой обязательно наступит первый успех.

Дискретная случайная величина $X = m$ имеет геометрическое распределение, если она принимает значения 1, 2, ..., m , ... (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями

$$P(X = m) = pq^{m-1},$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $m = 1, 2, \dots$.

Определение геометрического распределения корректно, так как сумма вероятностей $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} pq^{i-1} = p \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$.

Случайная величина $X = m$, имеющая геометрическое распределение, представляет собой число m испытаний, проведенных по схеме Бернулли, с вероятностью p наступления события в каждом испытании до первого положительного исхода.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X , имеющей геометрическое распределение с параметром p вычисляются по формулам:

$$M(X) = \frac{1}{p},$$

$$D(X) = \frac{q}{p^2},$$

где $q = 1 - p$.

Гипергеометрическое распределение

Пусть имеется N элементов, из которых M элементов обладают некоторым признаком A . Извлекаются случайным образом без возвращения n элементов. X — дискретная случайная величина, число элементов обладающих признаком A , среди отобранных n элементов. Вероятность, что $X = m$ определяется по формуле $P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по гипергеометрическому закону, определяются формулами:

$$M(X) = n \frac{M}{N},$$

$$D(X) = n \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right).$$

4. Непрерывные случайные величины.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, выражающая для каждого x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x : $F(x) = P(X < x)$.

Функцию $F(x)$ иногда называют *интегральной функцией распределения*, или *интегральным законом распределения*.

Случайная величина X называется *непрерывной*, если ее функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, быть может, отдельных точек.

Примеры непрерывных случайных величин: диаметр детали, которую токарь обтачивает до заданного размера, рост человека, дальность полета снаряда и др.

Теорема 1. Вероятность любого отдельно взятого значения непрерывной случайной величины равна нулю

$$P(X = x_1) = 0.$$

Следствие 1.1. Если X — непрерывная случайная величина, то вероятность попадания случайной величины в интервал (x_1, x_2) не зависит от того, является этот интервал открытым или закрытым, т.е.

$$P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X \leq x_2).$$

Если непрерывная случайная величина X может принимать только значения в границах от a до b (где a и b — некоторые постоянные), то функция распределения ее равна нулю для всех значений $x \leq a$ и единице для значений $x > b$.

Для непрерывной случайной величины $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

Все свойства функций распределения дискретных случайных величин выполняются и для функций распределения непрерывных случайных величин.

Задание непрерывной случайной величины с помощью функции распределения не является единственным.

Плотностью вероятности (плотностью распределения или плотностью) $p(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная ее функции распределения

$$p(x) = F'(x).$$

Плотность вероятности $p(x)$, как и функция распределения $F(x)$, является одной из форм закона распределения, но в отличие от функции распределения она существует только для *непрерывных* случайных величин.

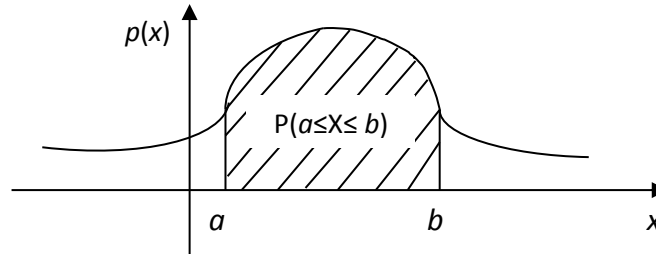
Плотность вероятности иногда называют дифференциальной функцией, или дифференциальным законом распределения.

График плотности вероятности называется кривой распределения.

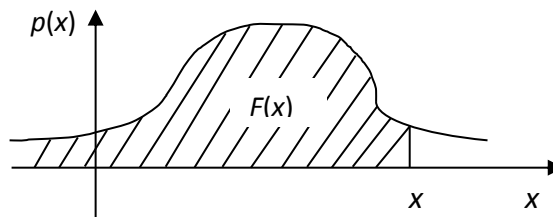
Свойства плотности вероятности непрерывной случайной величины:

$$1. \quad p(x) \geq 0.$$

$$2. \quad P(a \leq X \leq b) = \int_a^b p(x) dx.$$



$$3. \quad F(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx.$$



$$4. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1.$$

Геометрически свойства плотности вероятности означают, что ее график — кривая распределения — лежит не ниже оси абсцисс, и полная площадь фигуры, ограниченной кривой распределения и осью абсцисс, равна единице.

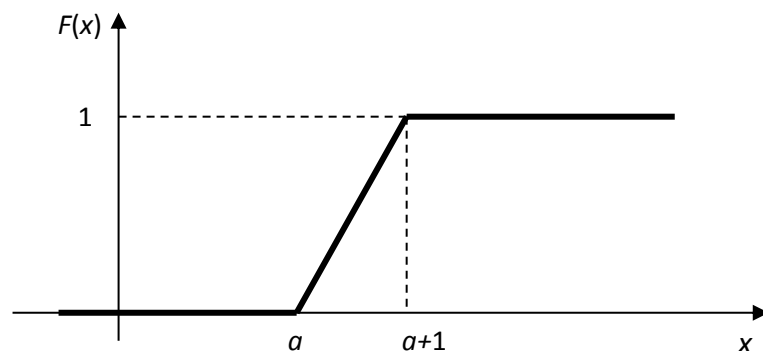
Пример 6. Минутная стрелка электрических часов передвигается скачками поминутно. Вы бросили взгляд на часы. Они показывают a минут. Тогда для вас истинное время в данный момент будет случайной величиной. Найти ее функцию распределения.

Решение. Очевидно, что функция распределения истинного времени равна 0 для всех $x \leq a$ и единице для $x > a + 1$. Время течет равномерно. Поэтому вероятность того, что истинное время меньше $a + 0,5$ мин, равна 0,5, так как

одинаково вероятно, прошло ли после a менее или более полминуты. Вероятность того, что истинное время меньше $a + 0,25$ мин, равна $0,25$ (вероятность этого времени втрое меньше вероятности того, что истинное время больше $a + 0,25$ мин, а сумма их равна единице, как сумма вероятностей противоположных событий). Аналогично рассуждая, найдем, что вероятность того, что истинное время меньше $a + 0,6$ мин, равна $0,6$. В общем случае вероятность того, что истинное время меньше $a + \alpha$ мин ($0 < \alpha < 1$), равна α . Следовательно, функция распределения истинного времени имеет следующее выражение:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leq a, \\ \alpha & \text{для } x = a + \alpha \ (0 < \alpha \leq 1), \\ 1 & \text{для } x > a + 1. \end{cases}$$

Она непрерывна всюду, а производная ее непрерывна во всех точках, за исключением двух: $x = a$ и $x = a + 1$. График этой



5. Закон больших чисел. Неравенство Чебышева.

Следующие утверждения и теоремы составляют содержание группы законов, объединенных общим названием *закон больших чисел*.

Лемма 6 (неравенство Маркова). Пусть X — неотрицательная случайная величина, т.е. $X \geq 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{M(X)}{\varepsilon},$$

где $M(X)$ — математическое ожидание X .

Следствие 6.1. Так как события $X \geq \varepsilon$ и $X < \varepsilon$ противоположные, то неравенство Маркова можно записать в виде

$$P(X < \varepsilon) \geq 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}.$$

Пример 7. Оценить вероятность того, что в течение ближайшего дня потребность в воде в населенном пункте превысит 150 000 л, если среднесуточная потребность в ней составляет 50 000 л.

Решение. Используя неравенство Маркова в виде $P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{M(X)}{\varepsilon}$,

получим $P(X \geq 150\,000) \leq \frac{50\,000}{150\,000} = \frac{1}{3}.$

Пример 8. Среднее число солнечных дней в году для данной местности равно 90. Оценить вероятность того, что в течение года в этой местности будет не более 240 солнечных дней.

Решение. Согласно неравенству $P(X \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}$, имеем

$$P(X \leq 240) \geq 1 - \frac{90}{240} = 1 - 0,375 = 0,625.$$

Лемма 7 (неравенство Чебышева). Для любой случайной величины X , имеющей конечную дисперсию и любого $\varepsilon > 0$

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Следствие 7.1. Для любой случайной величины X с конечной дисперсией и любого $\varepsilon > 0$

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Пример 9. Длина изготавливаемых деталей является случайной величиной, среднее значение которой 50 мм. Среднеквадратичное отклонение этой величины равно 0,2 мм. Оценить вероятность того, что отклонение длины изготовленной детали от ее среднего значения по абсолютной величине не превзойдет 0,4 мм.

Решение. Для оценки вероятности используем неравенство Чебышева

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \quad P(|X - 50| < 0,4) \geq 1 - \frac{0,2^2}{0,4^2} = 1 - 0,25 = 0,75.$$

Пример 10. Среднесуточное потребление электроэнергии в населенном пункте равно 20 000 кВт/ч, а среднеквадратичное отклонение — 200 кВт/ч. Какого потребления электроэнергии в этом населенном пункте можно ожидать в ближайшие сутки с вероятностью, не меньшей 0,96?

Решение. Воспользуемся неравенством Чебышева $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$. Подставим в правую часть неравенства вместо $D(X)$ величину $200^2 = 40\,000$, сделаем ее большей или равной 0,96:

$$1 - \frac{40\,000}{\varepsilon^2} \geq 0,96 \Leftrightarrow \frac{40\,000}{\varepsilon^2} \leq 0,04 \Leftrightarrow \varepsilon^2 \geq \frac{40\,000}{0,04}, \quad \varepsilon \geq 1000.$$

Следовательно, в этом населенном пункте можно ожидать с вероятностью не меньшей 0,96 потребление электроэнергии $20\,000 \pm 1000$, т.е. $X \in [19\,000; 21\,000]$.

Теорема Чебышева. Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ последовательность независимых случайных величин с математическими ожиданиями $M(X_1), M(X_2), \dots, M(X_n)$ и дисперсиями $D(X_1), D(X_2), \dots, D(X_n)$, ограниченными одной и той же постоянной $D(X_i) \leq C \quad (i = \overline{1, n})$, то какова бы ни была постоянная $\varepsilon > 0$

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon.$$

Теорема Чебышева гласит: если рассматривается достаточно большое число независимых случайных величин, которые имеют ограниченные дисперсии, то почти достоверным можно считать событие, заключающееся в том, что отклонение среднего арифметического случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий будет по абсолютной величине сколь угодно малым.

Пример 11. За значение некоторой величины принимают среднеарифметическое достаточно большого числа ее измерений. Предполагая, что среднеквадратичное отклонение возможных результатов каждого измерения не превосходит 5 мм, оценить вероятность того, что при 1000 измерений неизвестной величины отклонение принятого значения от истинного по абсолютной величине не превзойдет 0,5 мм.

Решение. Воспользуемся неравенством

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

По условию $n = 1000$, $\varepsilon = 0,5$, $C = 5^2 = 25$. Итак, искомая вероятность

$$P\left(\left|\frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} X_i - \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} M(X_i)\right| < 0,5\right) \geq 1 - \frac{25}{1000 \cdot 0,25} = 0,9., \text{ т.е. } P \geq 0,9.$$

Частными случаями теоремы Чебышева являются теоремы Бернулли и Пуассона.

Теорема Бернулли. При неограниченном увеличении числа независимых опытов частость появления $\frac{m}{n}$ некоторого события A сходится по вероятности к его вероятности $p = P(A)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

где ε — сколь угодно малое положительное число.

При доказательстве теоремы Бернулли получаем такую оценку

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}, \text{ которая применяется на практике.}$$

Теорема Пуассона. Если производится n независимых опытов и вероятность появления события A в k -м опыте равна p_k , то при

увеличении n частость $\frac{m}{n}$ события A сходится по вероятности к среднеарифметическому вероятностей p_k :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

где ε — сколь угодно малое положительное число. При доказательстве этой теоремы используется неравенство $P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$, имеющее практическое применение.

Пример 12. При контрольной проверке изготавливаемых приборов было установлено, что в среднем 15 шт. из 100 оказывается с теми или иными дефектами. Оценить вероятность того, что доля приборов с дефектами среди 400 изготовленных будет по абсолютной величине отличаться от математического ожидания этой доли не более чем на 0,05.

Решение. Воспользуемся неравенством

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

По условию $n = 400$, $\varepsilon = 0,05$. В качестве p возьмем величину, полученную при проверке для доли брака $p = \frac{15}{100} = 0,15$.

$$\text{Итак, } P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{0,15 \cdot 0,85}{400 \cdot 0,05^2} = 0,8725.$$

Пример 13. Вероятность того, что изделие является качественным, равна 0,9. Сколько следует проверить изделий, чтобы с вероятностью не меньшей 0,95 можно было утверждать, что абсолютная величина отклонения доли качественных изделий от 0,9 не превысит 0,01?

Решение. Воспользуемся неравенством $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$.

По условию $p = 0,9$, $q = 1 - 0,9 = 0,1$, $\varepsilon = 0,01$. Подставим в правую часть вышеприведенного неравенства эти значения

$$1 - \frac{0,9 \cdot 0,1}{n \cdot 0,0001} \geq 0,95 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{900}{n} \leq 0,05 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 18\,000.$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Значения* функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3980	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1845	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0033	0024	0017	0012	0009	0006	0004	0003	0002
4,0	0001	0001	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

* Все значения умножены на 10 000.

Значения* функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

<i>t</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	00000	00798	01596	02393	03191	03988	04784	05581	06376	07171
0,1	07966	08759	09552	10348	11134	11924	12712	13499	14285	15069
0,2	15852	16633	17413	18191	18967	19741	20514	21284	22052	22818
0,3	23582	24344	25103	25860	26614	27366	28115	28862	29605	30346
0,4	31084	31819	32552	33280	34006	34729	35448	36164	36877	37587
0,5	38292	38995	39694	40387	41080	41768	42452	43132	43809	44481
0,6	45149	45814	46474	47131	47783	48431	49075	49714	50350	50981
0,7	51607	52230	52848	53461	54070	54675	55275	55870	56461	57047
0,8	57629	58206	58778	59346	59909	60468	61021	61570	62114	62653
0,9	63188	63718	64243	64763	65278	65789	66294	66795	67291	67783
1,0	68269	68750	69227	69699	70166	70628	71086	71538	71986	72429
1,1	72867	73300	73729	74152	74571	74986	75395	75800	76200	76595
1,2	76986	77372	77754	78130	78502	78870	79233	79592	79945	80295
1,3	80640	80980	81316	81648	81975	82298	82617	82931	83241	83547
1,4	83849	84146	84439	84728	85013	85294	85571	85844	86113	86378
1,5	86639	86696	87149	87398	87644	87886	88124	88358	88589	88817
1,6	89040	89260	89477	89690	89899	90106	90309	90508	90704	90897
1,7	91087	91273	91457	91637	91814	91988	92159	92327	92492	92655
1,8	92814	92970	93124	93275	93423	93569	93711	93852	93989	94124
1,9	94257	94387	94514	94639	94762	94882	95000	95116	95230	95341
2,0	95450	95557	95662	95764	95865	95964	96060	96155	96247	96338
2,1	96427	96514	96599	96683	96765	96844	96923	96999	97074	97148
2,2	97219	97289	97358	97425	97491	97555	97618	97679	97739	97798
2,3	97855	97911	97966	98019	98072	98123	98172	98221	98269	98315
2,4	98360	98405	98448	98490	98531	98571	98611	98649	98686	98723
2,5	98758	98793	98826	98859	98891	98923	98953	98983	99012	99040
2,6	99068	99095	99121	99146	99171	99195	99219	99241	99263	99285
2,7	99307	99327	99347	99367	99386	99404	99422	99439	99456	99473
2,8	99489	99505	99520	99535	99549	99563	99576	99590	99602	99615
2,9	99627	99639	99650	99661	99672	99682	99692	99702	99712	99721
3,0	99730	99739	99747	99755	99763	99771	99779	99786	99793	99800
3,1	99806	99813	99819	99825	99831	99837	99842	99848	99853	99858
3,2	99863	99867	99872	99876	99880	99885	99889	99892	99896	99900
3,3	99903	99907	99910	99913	99916	99919	99922	99925	99928	99930
3,4	99933	99935	99937	99940	99942	99944	99946	99948	99950	99952
3,5	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99963	99964	99966	99967
3,6	99968	99969	99971	99972	99973	99974	99975	99976	99977	99978
3,7	99978	99979	99980	99981	99982	99982	99983	99984	99984	99985
3,8	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989	99989	99990	99990
3,9	99990	99991	99991	99992	99992	99992	99992	99993	99993	99993

* Все значения умножены на 100 000.

Таблица значений функции Пуассона

$$P(X = m) = P_{n, m} \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

m	λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0		0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1		0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3596	0,3696
2		0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3		0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4		—	—	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5		—	—	—	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6		—	—	—	—	—	—	0,0001	0,0002	0,0003

m	λ	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0		0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
1		0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
2		0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0055
3		0,0313	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
4		0,0153	0,0902	0,1618	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337
5		0,0081	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
6		0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
7		0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1318
8		—	0,0009	0,0081	0,0298	0,0655	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
9		—	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,0318
10		—	—	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1180
11		—	—	0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
12		—	—	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728
13		—	—	—	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504
14		—	—	—	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324
15		—	—	—	—	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194
16		—	—	—	—	—	0,0003	0,0014	0,0045	0,0109
17		—	—	—	—	—	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058
18		—	—	—	—	—	—	0,0002	0,0009	0,0029
19		—	—	—	—	—	—	0,0001	0,0004	0,0014
20		—	—	—	—	—	—	—	0,0002	0,0006
21		—	—	—	—	—	—	—	0,0001	0,0003
22		—	—	—	—	—	—	—	—	0,0001

ЛИТЕРАТУРА

1. Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика.– М.: ФИМА, МЦНМО, 2006. – 400 с.
2. Высоцкий И.Р., Яценко И.В. ЕГЭ 2012. Задачи В10. Теория вероятностей. Рабочая тетрадь / под ред. А.Л. Семенова и И.Я. Яценко. – М.: МЦНМО, 2012. – 48 с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст]: учеб. пособие / В.Е. Гмурман. – М.: Высш. образование, 2006. – 404 с.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / В.Е. Гмурман . – 9-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2003. – 479 с.: ил.
5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 256 с. – (Высшее образование).
9. Тюрин Ю.Н. и др. Теория вероятностей и статистика. Экспериментальное учебное пособие для 10-11 классов общеобразовательных учреждений / Ю.Н. тюринбн, А.А. Макаров, И.Р. Высоцкий, И.В. Яценко. – М.: МЦНМО, 2014. – 248 с.